Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2019/2020
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Blatt 13 – 03.02.2020

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 10.02.2020, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Bonuspunkte)**.** Seien $0 < a < b$ und $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\min \big\{ \max_{t\in[a,b]} |p(t)| : p \in \mathcal{P}_k,\, p(0) = 1 \big\}$$

die eindeutige Lösung

$$q(t) = T_k\Big(\frac{a+b-2t}{b-a}\Big)/T_k\Big(\frac{a+b}{b-a}\Big)$$

besitzt, wobei T_k das k-te Tschebyscheff-Polynom sei.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Aussage falsch ist und betrachten Sie die Nullstellen und Extremwerte der Differenz $r = q - p$ für ein geeignetes Polynom $p \in \mathcal{P}_k$.

Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte)**.** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die kleinsten und größten Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben sind durch die Extremwerte der Funktion

$$R : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Aufgabe 3 (5 Bonuspunkte)**.** Seien $A, C \in \mathbb{R}^n$ symmetrische reguläre Matrizen. Beweisen Sie, dass die größten und kleinsten Eigenwerte der Matrix CA gegeben sind durch die Extremwerte der Abbildung

$$R : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{Ax \cdot x}{C^{-1}x \cdot x}.$$

Aufgabe 4 (1+2+2 Bonuspunkte)**.** Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit Knoten $(z_1, z_2, \dots, z_n) = \mathcal{N}_h$. Seien $M, \widetilde{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$M_{ij} = \int_\Omega \varphi_{z_i}\varphi_{z_j}\,\mathrm{d}x, \quad \widetilde{M}_{ij} = \int_\Omega \mathcal{I}_h[\varphi_{z_i}\varphi_{z_j}]\,\mathrm{d}x,$$

für $i, j = 1, 2, \dots, n$, mit dem nodalen Interpolationsoperator $\mathcal{I}_h : C(\overline{\Omega}) \to \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$.
(i) Zeigen Sie, dass M und $\widetilde{M}$ positiv definit und symmetrisch sind, und dass $\widetilde{M}$ eine Diagonalmatrix ist.
(ii) Beweisen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v^\top Mv \leq v^\top \widetilde{M}v \leq (d+2)v^\top Mv.$$

Tipp: Beweisen Sie die Ungleichung zunächst auf jedem Element $T \in \mathcal{T}_h$.
(iii) Zeigen Sie, dass $C = \widetilde{M}^{-1}$ ein optimaler Vorkonditionierer für M ist, das heißt, dass

$$\mathrm{cond}_2(CM) \leq d + 2,$$

und der Aufwand zur Berechnung von $r \mapsto Cr$ in $\mathcal{O}(n)$ liegt.