



Praktikum zur Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen III

Projekt 4 – 09.12.2019

Abgabe: per E-Mail bis Dienstag, den 07.01.2020, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei \mathcal{T}_h eine Triangulierung von $\Omega = (0, 1)^2$. Verwenden Sie die Von-Mises-Iteration um nicht-triviale Funktionen $u_h^{(1)}, u_h^{(N)} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ zu bestimmen, sodass $\lambda_1, \lambda_N \in \mathbb{R}$ existieren mit $\lambda_1 < \lambda_N$, und die Gleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^{(i)} \cdot \nabla v_h \, dx = \lambda_i \int_{\Omega} u_h^{(i)} v_h \, dx$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ und $i = 1, N$ gilt. Erstellen Sie Plots der Funktionsgraphen für verschiedene Gitter sowie Plots der Verhältnisse $q_h = \lambda_N / \lambda_1$ gegen die Gitterweite h für eine Folge von verfeinerten Triangulierungen unter Verwendung einer logarithmischen Achsenskalierung. Versuchen Sie, eine Beziehung $q_h \sim h^\alpha$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Lösen Sie approximativ das Poisson-Problem $-\Delta u = 1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ im Gebiet $\Omega = (0, 1)^d$, $d = 2, 3$ für eine Folge uniform verfeinerter Triangulierungen $(\mathcal{T}_j)_{j=0,1,\dots}$. Verwenden Sie zur Lösung der linearen Gleichungssysteme jeweils den Backslash-Operator, eine Gauß-Seidel-Iteration sowie den Multigrid-Algorithmus. Vergleichen Sie die CPU-Zeiten und diskutieren Sie die Ergebnisse.