Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Hedwig Keller

# Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 – 30. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 14. Dezember 2020, 9:00 Uhr

---

**Projekt 1** (10 Punkte)**.**

(1) Implementieren Sie das bedingungslos stabile Schema
$$\partial_t^+\partial_t^- U_j^n = \frac{1}{4}\partial_x^+\partial_x^-(U_j^{n+1} + 2U_j^n + U_j^{n-1})$$
zur numerischen Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T)\times(0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ für $x \in (0,1)$ zu gegebenen Funktionen $u_0, v_0 \in C([0,1])$. Verwenden Sie dabei eine Diskretisierung des Anfangswertes $\partial_t u(0,x)$ mittels des zentralen Differenzenquotienten und Geisterpunkten zur Zeit $-\Delta t$, sodass Sie quadratische Konvergenz erwarten können. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung $u(t,x) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$. Erstellen Sie Plots, welche die quadratische Konvergenz in Abhängigkeit der Diskretisierungsparameter veranschaulichen.

(2) Überprüfen Sie experimentel, dass die diskrete Energie
$$\Gamma^k = \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=1}^{J-1}|\partial_t^+ U_j^k|^2 + \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=1}^{J}|\partial_x^- U_j^{k+1/2}|^2$$
unabhänig von $k = 0,\dots K-1$ ist. Hierbei is $U_j^{k+1/2} = (U_j^{k+1} + U_j^k)/2$.

**Projekt 2** (10 Punkte)**.** Der Klang eines Saiteninstruments ist charakterisiert durch das auftreten verschiedener Obertöne. Um experimentell zu überprüfen, dass die Wellengleichung Effekte dieser Art beschreibt, betrachten wir eine Saite der Länge $\ell > 0$, die zur Zeit $t = 0$ an einer Stelle $x_p \in (0,\ell)$ gezupft und dadurch um eine Distanz $H > 0$ aus ihrer Ausgangsposition ausgelenkt wird. Der Zustand der Saite wird also beschrieben durch
$$u_0(x) = \begin{cases} Hx/x_p & \text{für } x \le x_p, \\ H(\ell - x)/(\ell - x_p) & \text{für } x > x_p. \end{cases}$$
Wir gehen davon aus, dass der Ton an einer Stelle $x_s \in (0,\ell)$ aufgegriffen wird, etwa durch das Schallloch im Resonanzkörper einer akustischen Gitarre oder einen elektromagnetischen Tonabnehmer im Fall einer E-Gitarre. Unter der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gleich $0$ ist, ergibt sich mittels Trennung der Veränderlichen in der Wellengleichung die exakte Lösung
$$u(t,x) = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\cos(\omega_m t)\sin(m\pi x)$$
mit $\omega_m = m\pi c$ und $c = (\sigma/\varrho)^{1/2}$, wobei $\varrho$ die Dichte und $\sigma$ die Spannung der Saite beschreibt. Bestimmen Sie mit Ihrem Programm aus Projekt 1 die numerische Lösung der Wellengleichung mit $c = 2$, $T = 2$, $x_p = 1/8$ und $H = 1/100$. Nutzen Sie Ihre Approximationen, um mit

Hilfe der MATLAB-Funktion `dct` für die diskrete Cosinus-Transformation Koeffizienten $\alpha_m$, $m = 1, 2, \ldots, K$, zu bestimmen, sodass

$$U_{j_s}^k = \sum_{m=1}^{K} \alpha_m \cos(\omega_m t_k),$$

wobei $j_s$ der entsprechende Index zum Gitterpunkt $x_s = 1/4$ ist. Erstellen Sie Plots der Schwingungen $w_m(t) = \alpha_m \cos(\omega_m t)$, $m = 1, 2, \ldots, 6$, als Funktionen von $t \in [0, T]$. Veranschaulichen Sie die dominierenden Obertöne, indem Sie die Verteilung der Amplituden in Form der Funktion $m \mapsto |\alpha_m|$ graphisch darstellen. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten für andere Werte von $x_p$ und $x_s$.