Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 4 – 14. Dezember 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 11. Januar 2021, 9:00 Uhr

---

Projekt 1 (10 Punkte)**.** (1) Definieren Sie Funktionen f, g und u_D, sodass $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= u_D \quad \text{auf } \Gamma_\mathrm{D} = \{0\} \times [0,1], \\ \partial_n u &= g \qquad \text{auf } \Gamma_\mathrm{N} = \partial\Omega \setminus \Gamma_\mathrm{D} \end{aligned}$$

ist. Lösen Sie das Problem numerisch mit einem Finite-Differenzen-Verfahren. Realisieren Sie die Neumann-Randbedingungen, indem Sie geeignete Geisterpunkte einführen und die Ableitungen in Normalenrichtung auf Γ_N mit zentralen Differenzenquotienten approximieren. Vergleichen Sie Ihre numerischen Lösungen mit der exakten Lösung u und verifizieren Sie so die quadratische Konvergenz des Verfahrens.

(2) Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = B_1(0), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei die Diskretisierung $r_i = (i - \frac{1}{2})\Delta r$, $i = 1, \dots, J+1$, $\vartheta_m = (m-1)\Delta\vartheta$, $m = 1, \dots, K+1$, der Kreisscheibe in Polarkoordinaten für $\Delta r = \frac{2}{2J+1}$, $\Delta\vartheta = \frac{2\pi}{K}$. Drücken Sie den Laplace-Operator in Polarkoodinaten aus und diskretisieren Sie die vorkommenden Ableitungen erster Ordnung mit dem zentralen Differenzenquotienten. Vergleichen Sie Ihre Approximation mit der exaten Lösung $u(x) = (|x|^2 - 1)/4$.

Projekt 2 (10 Punkte)**.** (1) Für das Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ sei eine Triangulierung durch $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2\}$ mit $T_1 = \mathrm{conv}\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ und $T_2 = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ gegeben. Approximieren Sie das Integral $\int_\Omega f_i \mathrm{d}x$ für die Funktionen $f_1(x) = x_1^2 x_2^2$ und $f_2(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$ durch Quadratur über die Dreieckmittelpunkte und Eckpunkte und mit einer 3-Punkt Gauß-Quadratur.

(2) Mit dem Programm `red_refine` können Sie die Triangulierung verfeinern. Verfeinern Sie das Gebiet bis zu fünf Mal, approximieren Sie mit der verfeinerten Triangulierung das Integral und bestimmten Sie die experimentelle Konvergenzordnungen.