Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5 – 11. Januar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 25. Januar 2021, 9:00 Uhr

---

Projekt 1 (15 Punkte)**.** Ein neuer Impfstoff gegen eine virale Infektionskrankheit muss tiefgekühlt gelagert werden.
Der Innenraum des Kühlschranks ist durch das Gebiet $\Omega = (0, 0.4) \times (0, 0.3) \times (0, 0.4)$ gegeben. Die Temperaturverteilung bezeichnen wir mit θ. An der Rückseite $y = 0$ des Kühlschranks beträgt die Temperatur konstant $-70°$. An der Vorderseite $y = 0.3$ des Kühlschranks befindet sich die Klappe. Ist diese geöffnet, so entspricht die Labortemperatur dort genau ($20°$C). Ist sie geschlossen, so ist der Kühlschrank dort, genauso wie an den anderen beiden Seiten $x = 0$ und $x = 0.4$, perfekt isoliert, d. h. es gilt $\partial_n \theta = 0$. Außerdem ist der Kühlschrank bereits tiefgekühlt: zur Zeit $t = 0$ beträgt die Temperatur überall $-70°$.
Da der Impfstoff nicht lange über einer Temperatur von $-70°$ gelagert werden kann, muss überlegt werden, welche der folgenden Vorgehensweisen beim Öffnen des Kühlschranks sinnvoller ist, wenn man möglichst wenig Energie verbrauchen möchte:
(i) Der Kühlschrank ist 30 Sekunden geöffnet, dann 30 Sekunden geschlossen und anschließend nochmal 30 Sekunden geöffnet;
(ii) Der Kühlschrank ist erst 30 Sekunden geschlossen und anschließend 60 Sekunden am Stück geöffnet.
Man erhält ein mathematisches Modell, indem man ausnutzt, dass die Wärmedichte w proportional zur Temperaturdichte θ ist, d. h. $w = \rho c_p \theta$, und der Wärmefluss proportional zum Temperaturgradienten ist, d. h. $q = -\kappa \nabla \theta$, und die thermische Energie insgesamt erhalten bleibt, d. h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$. Die Parameter für das Modell sind ungefähr durch die entsprechenden Konstanten für Luft gegeben, nämlich die Dichte $\rho = 1.2041\,\text{kg/m}^3$, der Wärmeleitkoeffizient $\kappa = 0.0262\,\text{W/(m K)}$ und die spezifische Wärmekapazität $c_p = 1.005 \times 10^3\,\text{J/(kg K)}$. Man kann eine Dimensionsreduktion durchführen,indem man θ durch durch seinen vertikalen Mittelwert $\widetilde{\theta}$ ersetzt, d.h. man betrachtet

$$\widetilde{\theta}(t, x, y) = 0.4^{-1} \int_0^{0.4} \theta(t, x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Formulieren Sie ein Anfangsrandwertproblem zur Beschreibung der gemittelten Temperaturverteilung $\widetilde{\theta}$ in $\widetilde{\Omega} = (0, 0.4) \times (0, 0.3)$. Implementieren Sie ein Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung des Problems und simulieren Sie damit die Szenarien (i) und (ii). Entscheiden Sie anhand Ihrer Simulation, ob es energietechnisch sinnvoller ist, den Kühlschrank einmal für einen längeren Zeitraum oder zweimal für einen kürzeren Zeitraum zu öffnen. Erläutern Sie die Grenzen des Modells und des numerischen Verfahrens.

Projekt 2 (10 Punkte)**.** Modifizieren Sie das MATLAB-Programm mit dem $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem, sodass das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(K\nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}, \quad (K\nabla u) \cdot n = g \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}},$$

gelöst wird. Dabei sei $K : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine stückweise stetige Abbildung, sodass $K(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit ist. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$, $\Gamma_{\mathrm{N}} = \{1\} \times (0, 2)$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{N}}$, $u(x, y) = x^2 y$ und

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & \sin(x) \\ \sin(x) & 2 \end{bmatrix}.$$