Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 6–25. Januar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 8. Februar 2021, 9:00 Uhr

---

Projekt 1 (10 Punkte)**.** Wir betrachten eine Getränkedose in einem Kühlschrank und möchten die Zeit bestimmen, die benötigt wird, um das in der Dose enthaltene Bier auf eine gegebene Temperatur zu kühlen. Dabei machen wir die Annahme, dass das dünne Aluminiumblech, aus dem die Dose besteht, während des betrachteten Zeitraums permanent die gleiche Temperatur hat, die ihrer Umgebungstemperatur im Kühlschrank entspricht. Um ein Modell herzuleiten, das die Temperaturänderung des Bieres beschreibt, benutzen wir, dass die Wärmedichte w proportional zur Temperatur θ ist, d. h. $w = \rho c_p \theta$, dass der Wärmefluss q proportional zum Temperaturgradienten $\nabla\theta$ ist, d. h. $q = -\kappa\nabla\theta$, und dass die Wärmeenergie erhalten bleibt, d. h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$ (vgl. Blatt 5, Projekt 1). Verwenden Sie die Werte

$$\rho = 1.009 \times 10^3\,\text{kg/m}^3, \quad \kappa = 0.597\,\text{W/(m K)}, \quad c_p = 4.186 \times 10^3\,\text{J/(kg K)}$$

für Dichte, Wärmeleitkoeffizient und spezifische Wärmekapazität des Bieres. Eine übliche Bierdose (500 ml) hat einen Durchmesser von 0.067 m und eine Höhe von 0.168 m. Für die Simulation gehen wir davon aus, dass die Dose genau die Form eines entsprechenden Zylinders mit diesen Maßen hat. Nehmen Sie an, dass die Dose aufrecht im Kühlschrank steht bei einer linear verlaufenden Umgebungstemperatur von 1.5° C an der Oberseite und 0.5° C an der Unterseite der Dose. Implementieren Sie eine P1-Finite-Elemente-Methode mit einem Crank-Nicolson-Verfahren für die Zeitdiskretisierung und bestimmen Sie damit experimentell die Zeit, die nötig ist, um das Bier von einer Ausgangstemperatur von 20° C auf eine Trinktemperatur von 3° C herunterzukühlen. Diskutieren Sie die Verlässlichkeit des Ergebnisses sowie die Grenzen des mathematischen Modells.
Hinweis: Auf der Vorlesungshomepage finden Sie eine MATLAB-Datei mit einer Triangulierung eines Zylinders in der entsprechenden Größe.

Projekt 2 (5 Punkte)**.** Modifizieren Sie das $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem von Blatt 5, Projekt 2, sodass nun das Robin-Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u + \alpha\partial_n u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

gelöst wird. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1)^2$, $\alpha = 2$, und $u(x,y) = x^2 + y^2$.

Projekt 3 (5 Punkte)**.** Für $\varepsilon > 0$ seien die Dreiecke $T = \operatorname{conv}\{(-1,0),(1,0),(0,\varepsilon)\}$ und $T^\pm = \operatorname{conv}\{(\pm 1,0),(0,0),(0,\varepsilon)\}$, sowie die Triangulierungen $\mathcal{T}_h^1 = \{T\}$ und $\mathcal{T}_h^2 = \{T^+, T^-\}$ des Gebietes $\Omega_\varepsilon = T$ gegeben. Berechnen Sie jeweils den Interpolationsfehler

$$\|\nabla(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(\Omega)}$$

für die Funktion $u(x,y) = 1 - x^2$ für $\varepsilon = 10^{-j}$, $j = 1,2,\ldots,5$, und diskutieren Sie die Relevanz einer Winkelbedingung für Folgen von Triangulierungen.

Projekt 4 (10 Bonuspunkte)**.** Es sei $\Omega = (0,1)^2$, $g \in L^2(\Omega)$ und $\alpha > 0$. Der eindeutige Minimierer $u \in H^1(\Omega)$ des Funktionals

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega (u-g)^2 \mathrm{d}x$$

erfüllt die Gleichung

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_\Omega (u-g) v dx \text{ für alle } v \in H^1(\Omega).$$

(1) Begründen Sie, warum das Problem wohlgestellt ist.

(2) Implementieren Sie die P1-Finite-Elemente Methode, um Approximationen von u zu berechnen, d.h. berechnen Sie für eine Folge von uniformen Triangulierungen $\mathcal{T}_h$ von Ω Funktionen $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathsf{d}x + \alpha \int_\Omega u_h v_h \mathsf{d}x = \alpha \int_\Omega g v_h dx \text{ für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h).$$

Testen Sie Ihr Programm für uniforme Triangulierungen mit Gitterweiten $h = 2^{-l}\sqrt{2}, l = 3, ..., 7, \alpha = 10^m, m = 0, ..., 5$ und $g = g_h = \chi_{B_{1/5}(x_\Omega)} + \eta_h$, wobei $x_\Omega = (1/2, 1/2)$ und $\eta_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}_h)$ elementweise konstant sei mit Funktionswerten, die gleichverteilt im Intervall $[-0.1, 0.1]$ seien. Visualisieren Sie die Galerkin-Approximationen mit dem Befehl `trisurf`. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Wofür könnte die betrachtete Gleichung geeignet sein? Welche Rolle spielt dabei der Parameter α?

(3) Formulieren Sie das Problem mit Dirichlet-Randbedingungen, begründen Sie die Wohlgestelltheit und wiederholen Sie die Experimente aus (2) für homogene Dirichlet Randdaten.