Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1 – 2. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 09. November 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** (i) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $u : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen für Differenzenquotienten:

$$|\hat{\partial} u(x_j) - u'(x_j)| \leq \frac{\Delta x^2}{6} \|u'''\|_{C(I)}, \quad \text{falls } u \in C^3(I)$$

$$|\partial^+ \partial^- u(x_j) - u''(x_j)| \leq \frac{\Delta x^2}{12} \|u^{(4)}\|_{C(I)}, \quad \text{falls } u \in C^4(I).$$

Nehmen Sie dabei $x_{j+1}, x_j, x_{j-1} \in I$ und $\Delta x = x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1}$ an.
(ii) Zeigen Sie, dass $\partial^+ \partial^- = \partial^- \partial^+$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung her, die den Transport einer Substanz durch ein langes, dünnes Rohr beschreibt, während zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ und an jeder Position $x \in \mathbb{R}$ weitere Substanz eingefügt werden kann. Diese Injektion soll durch eine Funktion $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben werden, die die eingefügte Substanzmenge pro Volumeneinheit angibt.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Seien $T > 0$ und $u : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t u + a(t, x) \partial_x u = 0$$

unter der Anfangsbedingung $u(0, x) = u_0(x)$.
(i) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine konstante Funktion a die Lösung u entlang von Geraden in der Zeit-Raum-Ebene, $\gamma(t) = [t, at]^\top$, konstant ist. Zeigen Sie für allgemeines a: Die Funktion u ist konstant entlang solcher Kurven $\gamma(t) = [t, y(t)]^\top$, die durch Lösungen y des Anfangswertproblems $y'(t) = a(t, y(t)), y(0) = c$ gegeben sind. Dies sind die Charakteristiken der Differentialgleichung.
(ii) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken für die Gleichung $\partial_t u + tx \partial_x u = 0$, d.h. für $a(t, x) = tx$. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $u_0(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Upwinding-Schema für die Transportgleichung äquivalent zum Schema

$$\partial_t^+ U_j^k + a_j^k \hat{\partial}_x U_j^k = |a_j^k| \frac{\Delta x}{2} \partial_x^+ \partial_x^- U_j^k,$$

ist.