Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 – 9. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 16. November 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**.** Wir betrachten die folgenden Differenzenschemata für die Transportgleichung:

$$\partial_t^+ U_j^k + a\partial_x^+ U_j^k = 0, \quad \partial_t^+ U_j^k + a\hat{\partial}_x U_j^k = 0.$$

(i) Überprüfen Sie die Stabilität der Schemata mithilfe der Fourier-Stabilitätsanalyse.
(ii) Konstruieren Sie für $a > 0$ jeweils Anfangswerte U_j^0, sodass die Stabilitätsabschätzung

$$\text{Für alle } k \geq 0 \text{ gilt: } \sup_{j=0,\dots,J} |U_j^{k+1}| \leq \sup_{j=0,\dots,J} |U_j^k|$$

verletzt ist.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_\ell(x) = e^{i\ell x}$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\ell \in \mathbb{Z}$, ein Orthogonalsystem auf $L^2(-\pi, \pi)$ definieren, d.h., dass für alle $\ell, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_\ell(x)\overline{\phi_m(x)}\,\mathrm{d}x = \delta_{\ell m}.$$

(ii) Für $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und $\ell \in \mathbb{Z}$ definiere $f_\ell = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_\ell(x)}\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |f_\ell|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Da man zeigen kann, dass das obige Orthonormalsystem vollständig ist, gilt hier sogar Gleichheit. Dies ist die *Parsevalsche Gleichung*.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Sei $u \in C^2([0,T] \times [\alpha, \beta])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}(s, y) = u(\tau s, Ly + x_0)$ für geeignete Parameter $\tau, L, x_0, T' > 0$ eine Lösung der Gleichung $\partial_s \widetilde{u} - \partial_y^2 \widetilde{u} = 0$ auf $(0, T') \times (0, 1)$ ist.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)**.** Bei der Konstruktion einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung mithilfe der »Separation der Variablen« soll eine Funktion $u_n(t, x) = v_n(t)w_n(x)$ gefunden werden, die die Differentialgleichung löst und den vorgegebenen Randbedingungen genügt. Eine Lösung des Anfangsrandwertproblems erhält man dann, indem man Koeffizienten $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt, sodass

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n(t) w_n(x)$$

in einem passenden Sinne konvergiert und $u(0, x) = u_0(x)$ erfüllt.
(i) Konstruieren Sie Paare (v_n, w_n), sodass $u_n(t, x) = v_n(t)w_n(x)$ die Gleichung $\partial_t u_n - \partial_x^2 u_n = 0$ auf $(0, T) \times (0, 1)$ und $u_n(t, 0) = u_n(t, 1) = 0$ für alle $t \in (0, T)$ erfüllt.
(ii) Verwenden Sie Ihre Lösungen aus (i), um eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit der Anfangsfunktion

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(n\pi x)$$

zu konstruieren.
Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede Funktion $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ so dargestellt werden kann.