Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 4 – 23. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 30. November 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 13 (2+2 Punkte)**.** (i) Bestimmen Sie Funktionen $u_n(t,x) = v_n(t)w_n(x), n \in \mathbb{N}$, die die Wellengleichung auf $(0,T) \times (0,1)$ unter Berücksichtigung von homogenen Dirichlet-Randbedingungen löst.
(ii) Seien $u_0, d_0 \in C([0,1])$ durch

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sin(n\pi x), \quad d_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \sin(n\pi x)$$

mit gegebenen Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Leiten Sie unter Ausnutzung von (i) eine Formel für die Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ auf $(0,T)\times(0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen sowie Anfangsbedingungen $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = d_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$ her.

Aufgabe 14 (2+2 Punkte)**.** (i) Beweisen Sie die Energieerhaltung für die Wellengleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen.
(ii) Leiten Sie daraus die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichung sowohl für homogene Dirichlet- als auch für homogene Neumann-Randbedingungen her.

Aufgabe 15 (2+2 Punkte)**.** Seien $J \in \mathbb{N}, \Delta x = 1/J$ und $V, W \in \mathbb{R}^{J+1}$.
(i) Beweisen Sie die diskrete Produktregel

$$\partial_x^-(W_j V_j) = W_j(\partial_x^- V_j) + (\partial_x^+ W_{j-1})V_{j-1}.$$

(ii) Leiten Sie daraus die Formel für partielle Summation

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} (\partial_x^+ W_j) V_j = -\Delta x \sum_{j=1}^{J} W_j(\partial_x^- V_j) + W_J V_J - W_0 V_0$$

her und erläutern Sie deren Verhältnis zur Formel für partielle Integration.

Aufgabe 16 (1+1+1+1 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig (partiell) differenzierbar. Wir schreiben $\partial_i = \partial_{x_i}$ für die i-te partielle Ableitung. Verwenden Sie die Definitionen

$$\operatorname{div} v = \sum_i \partial_i v_i, \quad \operatorname{grad} f = [\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f]^\top, \quad \Delta f = \sum_i \partial_i^2 f,$$

$$\operatorname{rot} v = [\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1]^\top, \quad \boldsymbol{\Delta} v = [\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3]^\top,$$

um folgende Identitäten zu beweisen:
(i) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$, (ii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, (iii) $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$, (iv) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} v = \operatorname{grad}\operatorname{div} v - \boldsymbol{\Delta} v$.