Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5 – 30. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 07. Dezember 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 17 (2+2 Punkte)**.** Sei $u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = d_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (i) Die Variablen ξ, η seien durch $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ definiert. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(t,x)$ die Gleichung

$$\partial_\xi \partial_\eta \tilde{u} = 0$$

erfüllt und leiten Sie daraus ab, dass es Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ gibt, sodass $\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ gilt.
(ii) Bestimmen Sie f und g in Abhängigkeit von u_0, d_0, sodass $u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$ gilt.
Bemerkung: Hier sehen Sie, dass sich bei der Wellengleichung ein »Signal« nach links und eines nach rechts bewegt.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das implizite Differenzenschema für die Wellengleichung einen Konsistenzfehler von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ hat.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Sei S^n der Flächeninhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre (also für $n = 1$ z.B. 2π für den Einheitskreis oder für $n = 2$ entsprechend 4π für die Einheitskugel-Oberfläche). Für $n \geq 2$ sei die Funktion $s_n : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ vermittels

$$s_n(x) = -\frac{1}{S^{n-1}} \begin{cases} \log|x|, & \text{für } n = 2, \\ \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)}, & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ punktweise $\Delta s_n = 0$ gilt.

Aufgabe 20 (2+2 Punkte)**.** (i) Benutzen Sie den Satz von Gauß, um für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ folgende Identitäten zu zeigen:

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n \,\mathrm{d}s = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) \,\mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot n \,\mathrm{d}s.$$

(ii) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ Lösungen des Randwertproblems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

gilt, und schließen Sie daraus, dass $u_1 = u_2$ ist.