Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 6 – 07. Dezember 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 14. Dezember 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Systemmatrix, die zur Finite-Differenzen-Diskretisierung des Poisson-Problems mit homogenen Randbedingungen gehört. Benutzen Sie das diskrete Maximumsprinzip, um zu zeigen, dass alle Einträge von A^{-1} nicht-negativ sind.

Aufgabe 22 (2+2+1 Punkte)**.** Wir betrachten ein Schwimmbecken $\Omega \times [0, H] \subset \mathbb{R}^3$, das horizontal, d.h. in der x_1-x_2-Ebene, eine ringförmige Fläche Ω mit Radien $0 < r < R$ habe (siehe Abbildung 1) und in der Höhe von $x_3 = 0$ bis $x_3 = H$ reiche. Es besitze die 3D-Temperaturverteilung $v : \Omega \times [0, H] \to \mathbb{R}$. Außerdem nehmen wir an, dass die Temperatur an den Rändern vorgegeben ist. Die Verteilung v erfülle die dreidimensionale homogene Poisson-Gleichung. Indem wir über die Höhe mitteln, erhalten wir in der horizontalen Ebene eine 2D-Temperaturverteilung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ vermittels

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{H}\int_0^H v(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3.$$

Aufgrund der Linearität des Integralmittels und der Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung handelt es sich nun um das zweidimensionale Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega = B_R(0)\backslash\overline{B_r(0)}, \quad u = u_r \text{ auf } \partial B_r(0), \quad u = u_R \text{ auf } \partial B_R(0)$$

für vorgegebene reelle Zahlen $0 < r < R$ und $u_r, u_R \in \mathbb{R}$.
(i) Zeigen Sie, dass für $g \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\varrho(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ gilt

$$\Delta(g \circ \varrho) = g''(\varrho) + \frac{g'(\varrho)}{\varrho} = \frac{(\varrho g'(\varrho))'}{\varrho}.$$

(ii) Begründen Sie die Annahme $u(x_1, x_2) = \tilde{u}(\varrho)$ und lösen Sie das Poisson-Problem für ein Schwimmbecken mit $r = 10\,\text{m}, R = 20\,\text{m}, u_r = 20\,°\text{C}, u_R = 40\,°\text{C}$.
(iii) In welchem Radius muss man schwimmen, damit die Nase von Wasser mit einer Temperatur von 30 °C umgeben ist? Welche Temperaturdifferenz spürt man zwischen den beiden Schultern, deren Abstand 50 cm betrage?

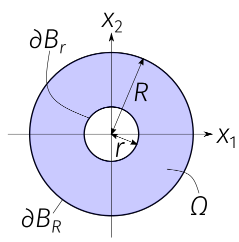

Abbildung 1. Horizontaler Schnitt Ω des Schwimmbeckens (blaue Fläche) und dessen Ränder $\partial\Omega$.

Aufgabe 23 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen und geben Sie jeweils eine knappe Begründung Ihrer Wahl an:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \Delta u &= f \quad \text{in } (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d, \\ \partial_{x_1}^2 u - 3\partial_{x_1}\partial_{x_2} u + \partial_{x_2}^2 u &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2} u &= f \quad \text{in } (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 24 (Fundamentallemma, 2+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(-1/(1-|x|^2)) & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

glatt ist, d.h. dass $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt.
(ii) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $f \in C(\Omega)$. Es gelte

$$\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $v \in C^\infty(\Omega)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass $f = 0$ in Ω gilt.