Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21

Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 7 – 14. Dezember 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 21. Dezember 2020, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 25 (2+2 Punkte)**.** (i) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega)$ sei $\tilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten gilt:

$$\Delta \tilde{u} = \partial_r^2 \tilde{u} + r^{-1}\partial_r \tilde{u} + r^{-2}\partial_\phi^2 \tilde{u}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(r,\phi) = r^{3/4}\sin(3\phi/4)$ harmonisch ist. Handelt es sich um eine klassische Lösung der Poissongleichung auf $\Omega = \{r[\cos\phi, \sin\phi] : 0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le \frac{4\pi}{3}\}$? Begründen Sie bitte Ihre Entscheidung.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I(u) = \int_{-1}^{1} x^2 \big(u'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x$$

mit den Randbedingungen $u(-1) = -1$ und $u(1) = 1$ keinen Minimierer in $C^1((-1,1))$ besitzt.

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, dass $C^1(I)$ vollständig bezüglich der Norm

$$\|v\|_\infty := \sup_{x\in I} |v(x)| + \sup_{x \in I} |v'(x)|,$$

aber nicht bezüglich der Norm

$$\|v\|_1 := \int_I |v(x)| + |v'(x)| \,\mathrm{d}x$$

ist.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass die bilineare Abbildung $a : (x,y) \mapsto x^\top M y$ die Bedingungen des (i) Rieszschen Darstellungssatzes und (ii) des Lax-Milgram-Lemmas erfüllt.