Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Pascal Weyer

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 8 – 21. Dezember 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 11. Januar 2021, 9:00 Uhr

---

Der Weihnachtsmann arbeitet dieses Jahr im Homeoffice. Da er zur Corona-Risikogruppe gehört und sich an die Kontaktbeschränkungen hält, bleibt es am Christkind hängen, alle Geschenke zu verteilen. Dem Mann im roten Mantel obliegen allein die Fütterung der Rentiere und der sporadische Austausch mit einem international erfolgreichen Online-Versandhandel, wenn dessen künstliche Intelligenz an allzu krakeligen Kinder-Handschriften scheitert. Beim allabendlichen Bad schöpft der Weißbärtige neue Hoffnung, im nächsten Jahr wieder selbst für glänzende Kinderaugen und neue Umsatzrekorde des Handels zu sorgen.
Heute schmökert Santa beim Baden in einem Buch über partielle Differentialgleichungen, das letztes Jahr schon am 27. Dezember retourniert worden war, da der Inhalt der Beschenkten völlig trivial vorkam. Während er das Kapitel über Wärmeleitung liest, macht er sich Gedanken über die Hitzeverteilung in seinem Telefonkabel, wenn nächstes Jahr wieder die Drähte glühen – und das nicht nur sprichwörtlich... Angespornt durch das belebende Aroma eines ebenfalls zurückgeschickten Badeschaumes möchte er diese Situation einmal modellieren.
Sein Telefonkabel besitze hierbei die Länge L sowie die Wärmeleitfähigkeit $\kappa > 0$ und werde in einem Telefongespräch der Länge $T \ggg 0$ beansprucht. Der sympathische Limonaden-Werbeträger geht davon aus, dass bei einem Telefonat an beiden Kabelenden jeweils eine konstante Menge »Glühen« in den Draht fließt. Sie kennen bereits die Wärmeleitungsgleichung für einen solchen Fall samt verschiedener Diskretisierungen mit Differenzenquotienten. Der Weihnachtsmann (und damit auch wir) möchte jedoch eine andere Art der Berechnung nutzen, die sich leichter auf andere Probleme mit Differentialgleichungen verallgemeinern lässt als die reinen Differenzenquotienten.

Aufgabe 29 (4+4)**.** Also zur Mathematik: Sei $I = [0, L]$. Für die bekannte Wärmeleitungsgleichung suchen wir ein $u : [0, T] \times I \to \mathbb{R}$ mit den »Glühwerten« $u'(t, 0) = g_0, u'(t, L) = g_L$, das

$$\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$$

und $u(0, x) = 0$ im Inneren von I erfüllt.
(i) Zeigen Sie, dass eine solche Lösung auch die schwache Formulierung

$$\int_I \partial_t u \, v \, \mathrm{d}x + \kappa \int_I \partial_x u \, \partial_x v \, \mathrm{d}x = \kappa \, [g_L \, v(L) - g_0 \, v(0)]$$

für alle $v \in H^1(I) = W^{1,2}(I)$ erfüllt. Sie dürfen hierfür annehmen, dass alle Funktionen in $H^1(I)$ stetig sind. Wir verwenden die Schreibweise $(.,.)$ für das L^2-Skalarprodukt und erhalten damit $(\partial_t u, v) + \kappa(\partial_x u, \partial_x v) = \kappa \, [g_L \, v(L) - g_0 \, v(0)]$.
(ii) Bei der Diskretisierung werden wir nun in Ort und Zeit unterschiedliche Methoden anwenden. Wir diskretisieren die Zeitableitung mit den bereits bekannten finiten Rückwärtsdifferenzen und einer Zeitschrittweite $\tau > 0$ und setzen $u^{k+1} = u^k + \tau d^{k+1}$. Die einzelnen u^k sind dabei Funktionen von I nach $\mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung ist entsprechend $u^0(x) = 0$. Zeigen Sie, dass sich die schwache Formulierung damit auch als

$$(*) \qquad (d^{k+1}, v) + \kappa\tau([d^{k+1}]', v') = -\kappa([u^k]', v') + \kappa \, [g_L \, v(L) - g_0 \, v(0)]$$

für alle $v \in H^1$ schreiben lässt. Hier bezeichne u' die Ableitung nach der Ortskoordinate.

Aufgabe 30 (4+4 Punkte)**.** Um Gleichung ($*$) lösen zu können, schränken wir den unendlichdimensionalen Hilbertraum $W^{1,2}(I)$ auf einen endlichen Teilraum V_h ein. Dabei projezieren wir alle Funktionen entsprechend auf V_h und ersetzen $d^{k+1} \mapsto d_h^{k+1}, u^k \mapsto u_h^k$. Wenn wir eine Basis $(v_j)_{j=0,\dots,J}$ in V_h gewählt haben, können wir $d_h^{k+1}, u_h^k \in V_h$ in dieser Basis darstellen. Wir verwenden dabei die Schreibweisen

$$d_h^{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{J} D_j^{k+1} v_j(x), \quad u_h^k(x) = \sum_{j=0}^{J} U_j^k v_j(x).$$

(i) Erläutern Sie, wieso man die schwache Formulierung damit als

$$\sum_{j=0}^{J} [M_{ij} + \kappa\tau S_{ij}] D_j^{k+1} = -\sum_{j=0}^{J} \kappa S_{ij} U_j^k + g_L\, v_i(L) - g_0\, v_i(0)$$

für alle $i = 0, \dots, J$ schreiben kann und definieren Sie passende Matrizen M und S. Wir haben die Bestimmung des Zeitschritts D_j^{k+1} damit auf die Lösung eines $(J+1)$-dimensionalen LGS zurückgeführt, dessen Systemmatrix nicht vom Zeitschritt abhängt.

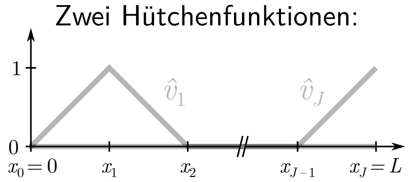
Um die Matrizen M und S explizit ausrechnen zu können, müssen wir zuerst den Teilraum V_h konkretisieren. Den ersten Schritt für den Übergang von H^1 zu V_h können Sie sich damit veranschaulichen, dass nicht mehr alle, d.h. unendliche viele, Punkte in I betrachtet werden, sondern nur noch endlich viele in sinnvollen Abständen. Der einfachste Fall ist dabei die Unterteilung von I in J Abschnitte der Länge $h = L/J$ (daher auch der Index von V_h) mit den Knoten $x_j = jh$. Dieses Vorgehen kennen Sie bereits von den finiten Differenzen. Als Elemente von V_h wählen wir diejenigen Funktionen aus, die auf jedem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$ affin linear und auf ganz I stetig sind. Damit wird V_h zu einem Vektorraum.

Zeigen Sie, dass die sogenannten »Hütchenfunktionen« $\hat{v}_j \in V_h$, die durch

$$\hat{v}_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V_h bilden, und dass sie in $H^1(I)$ liegen. Geben Sie die schwache Ableitung dabei explizit an. Damit ist gezeigt, dass V_h tatsächlich ein Teilraum von $H^1(I)$ ist.

Zwei Hütchenfunktionen:



(ii) Berechnen Sie M und S. Zeigen Sie, dass $M + \kappa\tau S$ invertierbar ist. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem sukzessiv die Werte von U_j^k bestimmt werden.

Aufgabe 31 (4 Bonuspunkte)**.** Zeigen Sie, dass $H^1(I) \hookrightarrow C^0(I)$ gilt. Diese Aussage hatten wir in Aufgabe 29 (i) angenommen. Beweisen Sie außerdem, dass Hütchenfunktionen keine zweite schwache Ableitung besitzen.

Aufgabe 32 (4 Bonuspunkte und viel Erkenntnis)**.** Sollten Sie den Eindruck gewonnen haben, der Assistent zur Vorlesung möchte Ihnen viel zu kitschige Märchen erzählen und drahtlose Telefone wären sowieso zeitgemäßer, ist das natürlich bedauerlich. Andernfalls freut es die Aufgabensteller, dass Ihnen diese kleine jahreszeitliche Einbettung einfacher finiter Elemente zugesagt hat. Dieses Konzept wird in Kapitel 3 der Vorlesung umfassend eingeführt und diskutiert. Sie sind an dieser Stelle herzlich eingeladen, den bisherigen Vorlesungsstoff zu wiederholen und zu festigen, indem Sie ihn in kurzen Essays ohne Formeln zusammenfassen.