Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 9 – 11. Januar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 18. Januar 2021, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 33 (2+2 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Interval und $V = C^1(I)$.
(i) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,\infty})$ mit der Norm

$$\|v\|_{V,\infty} = \sup_{x\in I} |v(x)| + \sup_{x\in I} |v'(x)|$$

ein Banachraum ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,1})$ mit der Norm

$$\|v\|_{V,1} = \int_I |v(x)| + |v'(x)| \,\mathrm{d}x$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 34 (2+2 Punkte)**.** Sei $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$.
(i) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\ge 0}$.
(ii) Beweisen Sie für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ die Höldersche Ungleichung

$$\int_\Omega |uv| \,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$.

Aufgabe 35 (2+2 Punkte)**.** Beweisen Sie die Produkt- und Kettenregel für schwache Ableitungen:
(i) Falls $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, dann ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.
(ii) Falls $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|g'| < C$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, dann ist $\widetilde{u} = g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla \widetilde{u} = g'(u)\nabla u$.

Aufgabe 36 (2+2 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{r(\cos\varphi, \sin\varphi) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega$ und

$$u_D = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi \in \{0, 3\pi/2\}, \\ \sin(2\varphi/3), & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass für $f = 0$ durch

$$u(r,\varphi) = r^{(2/3)} \sin(2\varphi/3)$$

eine schwache Lösung des Poisson-Problems auf Ω gegeben ist.
(ii) Zeigen Sie anhand des Beispiels aus (i), dass das Poisson-Problem im Allgemeinen nicht H^2-regulär ist, wenn das Lösungsgebiet nicht konvex ist.