



Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 10 – 18. Januar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 25. Januar 2021, 9:00 Uhr

Aufgabe 37 (2+2 Punkte). (i) Leiten Sie eine schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_D & \text{auf } \Gamma_D, \\ (K\nabla u) \cdot n = g & \text{auf } \Gamma_N, \end{cases}$$

her, wobei $K \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d \times d})$, $b \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ und $c \in C(\bar{\Omega})$.

(ii) Bestimmen Sie Bedingungen an die Koeffizienten K , b und c , sodass die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ garantiert ist.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sei $\Omega = (0, 1)^2$ und $V_h = \operatorname{span}\{\phi_{j,k} : j, k = 1, 2, \dots, N\}$ die lineare Hülle der Funktionen

$$\phi_{j,k}(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1 j / N) \sin(\pi x_2 k / N)$$

für $j, k = 1, 2, \dots, N$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix der aus dem Laplace-Operator resultierenden Bilinearform.

Aufgabe 39 (4 Punkte). Sei $u \in C^3(\Omega)$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Gleichung

$$|\Delta u|^2 - |D^2 u|^2 = \operatorname{div}(\nabla u \Delta u - \frac{1}{2} \nabla |\nabla u|^2).$$

Aufgabe 40 (2+2 Punkte). Sei $T \equiv (z_0, z_1, \dots, z_d)$ ein Simplex mit positiv orientierten Eckpunkten $z_0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{R}^d$ und sei

$$X_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\det X_T = d! |T|$ gilt.

(ii) Die nodalen Basisfunktionen $(\varphi_{z_i})_{i=0, \dots, d}$ auf T sind definiert durch $\varphi_{z_i}(z_j) = \delta_{ij}$. Beweisen Sie, dass die Gradienten der Basisfunktionen die folgende Gleichung erfüllen

$$[\nabla \varphi_{z_0}, \dots, \nabla \varphi_{z_d}]^\top = X_T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix},$$

wobei I_d die $(d \times d)$ -Einheitsmatrix bezeichnet.