Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Christian Palus

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 11 – 25. Januar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 1. Februar 2021, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 41 (3 + 1 Punkte)**.** Für $j \in \mathbb{N}$ sei die Folge $v_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch $v_j(n) = \delta_{jn}$, das heißt es ist

$$v_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots],$$

wobei die 1 an der j-ten Stelle steht.
(i) Zeigen Sie, dass die Folge $[v_j]_{j \in \mathbb{N}}$ schwach konvergiert und bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.
(ii) Zeigen Sie, dass keine stark konvergenten Teilfolgen (bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\ell^2}$) existieren.

Aufgabe 42 (4 Punkte)**.** Sei V ein Hilbertraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive Bilinearform, welche zusätzlich symmetrisch ist, und sei $b\colon V \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. Sei ferner $V_h \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum und $u_h \in V_h$ die eindeutige Galerkin-Approximation von $u \in V$ mit $a(u, v) = b(v)$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Quasi-Bestapproximations-Eigenschaft im Céa-Lemma mit der Konstanten $(k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}}$ gilt, also dass

$$\|u - u_h\|_V \le (k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V.$$

Dabei sind k_a und α die Beschränktheits- und Koerzivitätskonstante der Bilinearform a.

Aufgabe 43 (4 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, konvexes Lipschitzgebiet. Beweisen Sie konstruktiv die Existenz einer Konstanten $c_p > 0$, sodass

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le c_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega v \, \mathrm{d}x = 0$ gilt.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass v stetig ist und folgern Sie aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Nullstelle. Verwenden Sie diese, um $v(x)$ als geeignetes Integral darzustellen.

Aufgabe 44 (2+2 Punkte)**.** Für ein Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ mit Ecken $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ seien $z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{R}^2$ die Mittelpunkte der Seiten von T.
(i) Zeigen Sie, dass $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$ mit $\mathcal{K} = \{\chi_j : j = 0, 1, \dots, 5\}$ für $\chi_j(\phi) = \phi(z_j)$, $j = 0, 1, \dots, 5$, ein finites Element ist.
(ii) Konstruieren Sie die nodale Basis des Elements $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$.