Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 12 – 1. Februar 2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 8. Februar 2021, 9:00 Uhr

---

Aufgabe 45 (2+2 Punkte)**.** Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^d$ das d-dimensionale Einheitssimplex. Zu $T \in \mathcal{T}_h$ sei $\Phi_T : \widehat{T} \to T$ der zugehörige affine Diffeomorphismus, welcher $\widehat{T}$ auf T abbildet.
(i) Zeigen Sie, dass $D\Phi_T^{-1} = (D\Phi_T)^{-1}$ und dass diese Matrizen unabhängig von $x \in T$ beziehungsweise $\widehat{x} \in \widehat{T}$ sind.
(ii) Es bezeichne A die Steifigkeitsmatrix der $P1$-Finite-Elemente-Approximation des Poisson-Problems. Zeigen Sie, dass die Einträge von A gegeben sind durch

$$A_{z,y} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\widehat{T}} \Big(D\Phi_T^{-1} \nabla \widehat{\varphi}_{z,T}(\widehat{x}) \Big) \cdot \Big(D\Phi_T^{-1} \nabla \widehat{\varphi}_{y,T}(\widehat{x}) \Big) |\det D\Phi_T| \,\mathrm{d}\widehat{x},$$

wobei $\widehat{\varphi}_{z,T} = \varphi_z \circ \Phi_T^{-1}$ die nodale Basisfunktion auf dem Referenzelement $\widehat{T}$ bezeichnet, welche durch Transformation der (globalen) nodalen Basisfunktion φ_z entsteht.

Aufgabe 46 (2+2 Punkte)**.** Sei $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ eine Folge von Triangulierungen des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit maximaler Gitterweite $h \to 0$ und sei $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h|_T \in P^1(T) \text{ f. a. } T \in \mathcal{T}_h\}$.
(i) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\bigcup_{h>0} \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ dicht ist im Raum $H^1(\Omega)$.
(ii) Beweisen Sie (ohne Bestimmung einer Konvergenzrate), dass die Galerkin-Approximationen des Poisson-Problems auch ohne zusätzliche Regularitätsannahmen immer gegen die exakte Lösung konvergieren.

Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die eindimensionale Poisson-Gleichung auf dem Intervall $\Omega = (0,1)$ mit Nullrandwerten auf $\Gamma_{\mathrm{D}} = \{0,1\}$ und rechter Seite $f \in C(\overline{\Omega})$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1/n} = \{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] : k = 1, \dots, n\}$ eine Triangulierung von Ω bestehend aus n gleich langen Teilintervallen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die diskrete Lösung mit dem Finite-Differenzen-Verfahren unter Verwendung des zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung mit der P1-Finite-Elemente-Approximation übereinstimmt, wenn in letzterer die rechte Seite via

$$\int_\Omega f \varphi_z \,\mathrm{d}x \approx \int_\Omega \mathcal{I}_h^1[f\varphi_z] \,\mathrm{d}x$$

numerisch integriert wird.

Aufgabe 48 (4 Punkte)**.** Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung (max. 2 Seiten) des Kapitels über die Finite-Elemente-Methode. Veranschaulichen Sie Ihre Ausführungen beispielhaft anhand des Vorgehens bei der Diskretisierung der Poisson-Gleichung mit finiten Elementen. Verwenden Sie dabei unter anderem die folgenden Schlüsselwörter: *Galerkin-Approximation, nodale Basis, Interpolation, Fehlerabschätzung, Maximumprinzip.*

Hinweise: Als Hilfestellung für die Klausurvorbereitung haben wir Ihnen eine Altklausur im Übungsblatt-Bereich der Homepage zur Verfügung gestellt. Zusätzlich wird Herr Bartels eine Klausurvorbesprechung/Fragestunde anbieten Diese findet am

Donnerstag, 4. Februar 2021, um 12:00 Uhr im BBB-Raum `vBartels`

statt. Das Passwort für die Sitzung erhalten Sie per E-Mail, sofern Sie in HISinOne für die Vorlesung angemeldet sind. Die Teilnahme an der Fragestunde ist freiwillig.