Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1 – 2. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 16. November 2020, 9:00 Uhr

---

Projekt 1 (10 Punkte).

(1) Implementieren Sie ein numerisches Verfahren zur Lösung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= 0 && \text{in } (0,T)\times(0,1) \\ u(t,0) &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } x \in [0,1], \end{aligned}$$

wobei $T = 1$ und $u_0(x) = 1$ für $0.4 \le x \le 0.6$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Verwenden Sie in der Zeit den Vorwärtsdifferenzenquotienten und im Ort den Rückwärtsdifferenzenquotienten. Testen Sie die Diskretisierungsparameter

$$(\Delta t, \Delta x) = 1/80(2,2),\ (\Delta t, \Delta x) = 1/80(2,1),\ (\Delta t, \Delta x) = 1/80(1,2).$$

Überprüfen Sie jeweils, ob die CFL-Bedingung erfüllt ist, und vergleichen Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung der Transportgleichung.

(2) Modifizieren Sie Ihren Code derart, dass Sie ein numerisches Verfahren für

$$\partial_t u + a(x)\partial_x u = 0$$

erhalten, wobei $a : (0,1) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine gegebene Funktion ist. Wie müsste die CFL-Bedingung für nicht konstante Funktionen a formuliert werden? Testen Sie Ihren Code für den Fall $a(x) = (1+4x^2)^{1/2}$ und Anfangsbedingungen $u_0(x) = 1$ für $0.05 \le x \le 0.25$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Vergleichen Sie die numerische Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter.

(3) Testen Sie das Programm für $a(x) = -1$ und Anfangsbedingungen wie in (1). Gibt es Paare von Diskretisierungsparametern, die die CFL-Bedingung erfüllen?

(4) Verändern sie Ihren Code, sodass nur Vorwärtsdifferenzenquotienten verwendet werden. Hier sei nun die Randbedingung $u(t,1) = 0$ für $t \in [0,T]$ gegeben. Leiten Sie die CFL-Bedingung für dieses Verfahren her und probieren Sie verschiedene Werte für Δt und Δx aus.

Projekt 2 (10 Punkte).

(1) Approximieren Sie $f_i'(\tilde{x})$, $i = 1,2$ für die Funktionen $f_1(x) = \tan(x)$ in $\tilde{x} = 1/2$ und $f_2(x) = 0$ für $x \le 0$ und $f_2(x) = 0.5x^2$ für $x > 0$ in $\tilde{x} = 0$ mit dem Rückwärts-, Vorwärts- und zentralen Differenzenquotienten. Überprüfen Sie die bekannten Fehlerordnungen $\mathcal{O}(h)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ mit den Schrittweiten $h = 2^{-l}, l = 1,2,\ldots 50$.

(2) Konstruieren Sie (ohne Beweis) durch Extrapolation einen Quotienten $\hat{d}_h^* f_i(x)$, der die Ableitungen bis auf einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^4)$ approximiert. Überprüfen Sie das Ergebnis anhand der Funktionen aus (1). Welche Vor- und Nachteile besitzt diese Approximation im Vergleich zu derjenigen in Teil (1)?