Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Sören Bartels, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 – 16. November 2020

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, den 30. November 2020, 9:00 Uhr

---

Projekt 1 (10 Punkte)**.**

(1) Implementieren Sie ein θ-Mittelpunktverfahren, um das Anfangswertproblem $\partial_t u = \kappa d_x^2 u$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 1, \kappa = 1/100, u(0,x) = \sin \pi x$ für $x \in (0,1)$, und $u(t,0) = u(t,1) = 0$ für $t \in [0,T]$ zu lösen. Setzen Sie $\Delta x = 0.05$ und bestimmen Sie experimentell Δt, sodass das Verfahren für $\theta = 0$ stabil ist.

(2) Zeigen Sie, dass die exakte Lösung des Problems gegeben ist durch

$$u(t,x) = \sin(\pi x) e^{-\kappa \pi^2 t}.$$

Bestimmen Sie für $\theta = 0.5, \theta = 0.75$ und $\theta = 1$, und $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$, $j = 2, \dots 5$, den Approximationsfehler im Punkt $(t,x) = (1, 0.5)$. Verwenden Sie hierbei das Anzeigeformat `long`. Plotten Sie die Fehler in einem Fenster, indem Sie die Befehle `semilogy` und `hold on/off` verwenden. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

(3) Verändern Sie Ihren Code, um ein Verfahren für die Gleichung $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f$ zu erhalten. Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 2$, $f(x) = (x - 1/2)^2$, homogenen Dirichlet-Randdaten in $x = 0$ und $x = 1$, und Anfangswerten definiert durch $u_0(x) = 1$ für $0.45 \leq x \leq 0.55$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter und $\theta = 0, 1/2, 1$.

Projekt 2 (10 Punkte)**.**

(1) Modifizieren Sie Ihren Code aus Projekt 1 (mit $\theta = 0.5$) derart, dass Sie ein Verfahren für $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ in $(0,T) \times (0,1)$ mit $T = 10$ und

$$u(0,x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{16(x-1/4)(3/4-x)}\right) & \text{fuer } x \in (1/4, 3/4), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit Neumann-Randbedingungen $\partial_x u(t,0) = g_l(t)$ und $\partial_x u(t,1) = g_r(t)$ für $t = [0,T]$ erhalten.
Verwenden Sie hierfür $\partial_x^+ U_0^{k+1}$ bzw. $\partial_x^- U_J^{k+1}$ als Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1}, 0)$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1}, 1)$. Testen Sie Ihr Programm für homogene Neumann-Randdaten und $\Delta t = \Delta x = 10^{-m}$, $m = 1, 2, 3$. Sind die numerischen Lösungen sinnvoll? Berechnen Sie $c_0 \approx \int_0^1 u(0,x) \mathrm{d}x$, sowie $\max_{j=0,\dots J} |U_j^K - c_0|$, mit der Funktion `trapz` mit $10^3 + 1$ Stützstellen. Verwenden Sie hierbei das Anzeigeformat `long`.

(2) Verwenden Sie nun $\widehat{\partial}_x U_0^{k+1} = g_l(t_{k+1})$ und $\widehat{\partial}_x U_J^{k+1} = g_r(t_{k+1})$ als Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1}, 0)$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1}, 1)$. Führe hierzu sogenannte *Geisterpunkte* $x_{-1} = -\Delta x$ und $x_{J+1} = 1 + \Delta x$ ein. Wiederholen Sie die Experimente aus Aufgabenteil (1). Was fällt Ihnen auf? Begründen Sie, warum es sinnvoll ist $\widehat{\partial}_x U_0^{k+1}$ und $\widehat{\partial}_x U_J^{k+1}$ anstatt $\partial_x^+ U_0^{k+1}$ bzw. $\partial_x^- U_J^{k+1}$ als Diskretisierung von $\partial_x u(t_{k+1}, 0)$ bzw. $\partial_x u(t_{k+1}, 1)$ zu verwenden.