



## Numerik 1

Blatt 1 – 18.10.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 und 2.

Abgabe: 29.10.2021, 10:00 Uhr

---

### Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num>

**Hinweis:** Der Übungsbetrieb findet in den ungeraden Semesterwochen statt und beginnt am 1.11. Die Anmeldung zu den Übungsgruppen über HISinOne beginnt am Mittwoch, den 20.10. um 12 Uhr.

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass folgende Probleme gut konditioniert sind:

- (i) Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen.
- (ii) Die Inversion einer von Null verschiedenen Zahl.

**Aufgabe 2.** Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1 - 2x}{1 + 2x} - \frac{1}{1 + x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}$$

für  $x \neq 0$  mit  $|x| \ll 1$  vermeiden?

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Matrizen seien dabei quadratisch.

**Aufgabe 4.** Zu fixierten Normen  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^n$  und auf  $\mathbb{R}^m$  bezeichne  $\|\cdot\|_{op}$  die induzierte Operatornorm auf  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Die Operatornorm  $\|\cdot\|_{op}$  definiert eine Norm auf  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .
- (ii) Es gilt

$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf \{c \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| \leq c\|x\|\}$$

und das Supremum und das Infimum werden angenommen.

- (iii) Im Fall  $A \neq 0$  folgt für  $x \in \mathbb{R}^m$  mit  $\|x\| \leq 1$  und  $\|Ax\| = \|A\|_{op}$  bereits  $\|x\| = 1$ .