Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck

Numerik 1

Blatt 2 – 1.11.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 3. Abgabe: 12.11.2021, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Für $1 \leq p < \infty$ wird auf $\mathbb{R}^\ell$ durch $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^p\right)^{1/p}$ eine Norm definiert. Die induzierte Operatornorm sei ebenfalls mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnet.
(i) Zeigen Sie, dass $\|A\|_1 = \max_{k=1,\dots,n} \sum_{j=1}^m |a_{jk}|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt.
(ii) Für die symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $\det A \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_1(A)$, $\mathrm{cond}_2(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und diskutieren Sie, für welche Verhältnisse von a, b und c zugehörige lineare Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die invertierbaren (normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, das heißt sind $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen und gilt $\det L \neq 0$, so sind L^{-1} und $L_1 L_2$ ebenfalls (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, dass $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine normalisierte LU-Zerlegung und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine Cholesky-Zerlegung besitzt.
(ii) Berechnen Sie die normalisierte LU-Zerlegung von A_3 und die Cholesky-Zerlegung von A_4 mit

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{bmatrix}, \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix},$$

sofern diese existieren.