



Numerik 1

Blatt 3 – 15.11.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 4.

Abgabe: 26.11.2021, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num>

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, das heißt es gelte $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq k \leq n$ die $k \times k$ -Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ ebenfalls positiv definit ist.

(iii) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, sodass die Matrix PA eine normalisierte LU -Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 10 & -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [17, -23, -13, 51]^\top$.

Aufgabe 3. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^\top = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, e_{\pi^{-1}(2)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}].$$

Aufgabe 4. Wie groß ist der Aufwand des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spalten-Pivotsuche im Gegensatz zu dem mit totaler Pivotsuche?