Numerik 1

Blatt 5 – 13.12.2021

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 6. Abgabe: 7.1.2022, 10:00 Uhr

---

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = [4, 1, 2, 3]^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 2. (i) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $V^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.
(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+A = P_{(\ker A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\operatorname{Im} A}$.

Aufgabe 3. Seien $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, Eigenwerte und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A die Darstellung $A = VDV^{-1}$ mit $V = [v_1, \dots, v_n]$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ besitzt.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

(1) Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Konditionierung.
(2) Für $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $\|A\|_\infty = 6$ und $\|A\|_1 = 9$.
(3) Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt $\ker AB = \ker A$.
(4) Besitzt A eine LU-Zerlegung und ist A symmetrisch, so folgt $U = L^\top$.
(5) Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist durchführbar für Matrizen, die eine Cholesky-Zerlegung besitzen.
(6) Permutationsmatrizen erhält man durch Zeilenvertauschungen in der Einheitsmatrix.
(7) Durch $I_n - 2(v^\top v)^{-1}vv^\top$ wird eine Householder-Transformation definiert, sofern $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(8) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.