



Numerik 1

Blatt 7 – 24.1.2022

Benötigte Kapitel in 'Numerik 3x9': 1 bis 9.

Abgabe: 4.2.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num>

Aufgabe 1. Führen Sie einen Schritt des QR -Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2. Sei $\|A\|_{\mathcal{F}} = (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$ die Frobenius-Norm.

(i) Zeigen Sie, dass $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 = \text{tr}(A^{\top}A)$ sowie $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt und folgern Sie $\|Q^{-1}BQ\|_{\mathcal{F}} = \|B\|_{\mathcal{F}}$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q \in O(n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit der Kontraktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Fehlerabschätzung

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^k - x^{k-1}\|$$

gilt. Inwiefern ist diese Abschätzung für praktische Zwecke relevant?

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann reduzibel ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ existiert, sodass

$$PAP^{\top} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

mit geeigneten Matrizen B_{11}, B_{12} und B_{22} gilt.