Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck,
Coffi Aristide Hounkpe

# Praktische Übungen zu Numerik 1

Blatt 3 – 22.11.2021

Abgabe: 3.12.2021, 10:00 Uhr

---

**Homepage zur Vorlesung:**

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num

**Projekt 1.** i) Schreiben Sie ein Programm, das für eine $LU$-zerlegbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination löst und dabei die $LU$-Zerlegung von $A$ bestimmt.
Verwenden Sie Ihr Programm zur Lösung von Gleichungssystemen mit oberer Dreiecksmatrix, um das resultierende System $A^{(n)}x = b^{(n)}$ zu lösen. Testen Sie das Programm mit der folgenden Matrix $A$ und dem Vektor $b$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \\ 39 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

ii) Stören Sie die rechte Seite des nachfolgenden Gleichungssystems mit dem Vektor $d \in \mathbb{R}^n$, $d_i = 10^{-5}\cos(i\pi/n)$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $n = 10$:

$$a_{ij} = (i + j - 1)^{-1}, \; b_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}/(i + k - 1), \; x_i = (-1)^{i-1}, \; i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Berechnen Sie die Lösung $x_d$ des gestörten Gleichungssystems mithilfe Ihres Programms aus i), betrachten Sie den relativen Fehler $\|x - x_d\|_2 / \|x\|_2$ und vergleichen Sie diesen mit der Konditionszahl der Matrix, die Sie mit dem Matlab-Befehl `cond(A,2)` bestimmen können. Kommentieren Sie kurz die Ergebnisse.

**Projekt 2.** Erweitern Sie Ihr Programm aus Projekt 1, i) um eine Spalten-Pivotsuche. Führen Sie dazu einen Vektor $p \in \mathbb{N}^n$ ein, der die Zeilenvertauschungen berücksichtigt. Implementieren Sie zudem ein Abbruchkriterium, das das Verfahren beendet, sofern für das Pivotelement die Abschätzung $|a^{(k)}_{\pi(k),k}| \le 10^{-10}$ gilt. Beim Lösen des resultierenden Gleichungssystems sind in der Rückwärtssubstitution die Zeilenvertauschungen zu beachten. Testen Sie das Verfahren für das Gleichungssystem aus Projekt 1 sowie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$