Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Jakob Keck,
Coffi Aristide Hounkpe

Praktische Übungen zu Numerik 1

Blatt 6 – 17.1.2022

Abgabe: 28.1.2022, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/num`

Projekt 1. Die Zahlen $1, 2, 3$ seien Indikatoren für die Verständlichkeit einer Mathematikvorlesung, wobei 1 für sehr gut, 2 für gut und 3 für wenig verständlich stehe. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf eine Vorlesung der Verständlichkeit j eine Vorlesung der Verständlichkeit i folgt sei mit p_{ij} bezeichnet und es gelte

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Auf eine sehr gut verständliche Vorlesung folgt also mit 40% Wahrscheinlichkeit eine wenig verständliche Vorlesung. Bezeichnet der Vektor $x_0 \in [0,1]^3$ die Verständlichkeit der aktuellen Vorlesung, so sind die Wahrscheinlichkeiten der Verständlichkeitsindikatoren der k Vorlesungen später stattfindenden Veranstaltung gegeben durch $x_k = P^k x_0$.
(i) Testen Sie experimentell die Konvergenz der Folge $(x_k)_{k\geq 0}$, wobei x_0 durch kanonische Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ definiert sei, das heißt nach wie vielen Schritten gilt $\|x_k - x_{k+1}\|_1 \leq 10^{-5}$? Was bedeutet dies für die Verständlichkeit der Vorlesungen?
(ii) Angenommen, die Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ wird stationär, das heißt es gilt $x_k \approx x^*$ für alle $k \geq K$ mit einer hinreichend großen Zahl $K \geq 0$. Wie lässt sich x^* charakterisieren?
(iii) Testen Sie fünf mit `rand(3,1)` generierte, skalierte Startvektoren $x_0 \in [0,1]^3$ mit $\|x_0\|_1 = 1$ und charakterisieren Sie die stationären Punkte. Betrachten Sie dazu die Eigenwerte und -vektoren von P, die Sie in Matlab mit `[V,D] = eig(P)` bestimmen können.

Projekt 2. Verwenden Sie die Matlab-Routine `[Q,R] = qr(A)`, um das QR-Verfahren zu implementieren und beenden Sie die Iteration, falls $\|A_k - A_{k+1}\|_2 / \|A_k\|_2 \leq 10^{-5}$ gilt. Was wären andere sinnvolle Abbruchkriterien? Approximieren Sie mit Ihrem Programm die Eigenwerte der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 4, 10, 20$ und $B, B^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 29 \\ -2 & -4 & 18 \\ -1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

und diskutieren Sie die Voraussetzungen des Satzes über die Konvergenz des Verfahrens anhand dieser Beispiele.

Projekt 3 (Bonus)**.** Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren mit dem Abbruchkriterium $\mathcal{N}(A_k) \leq 10^{-4}$ und testen Sie es für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$a_{ij} = \sin(|i-j|\pi/n) - 2\delta_{ij}$$

für $i, j = 1, 2, \ldots, n$ mit $n = 2, 4, 8, 16$. Modifizieren Sie das Programm, um eine Implementation des zyklischen Jacobi-Verfahrens zu erhalten, das heißt auf die Suche des größten Eintrags wird verzichtet und alle Einträge werden sukzessive behandelt. Beobachten Sie grafisch die Größe der Einträge der Iterierten mit Hilfe der Matlab-Kommandos `[X,Y] = meshgrid(1:n,1:n)`, `surf(X,Y,A)` und `view(-270,90)`. Betrachten Sie die Anzahl der benötigten Iterationsschritte in Abhängigkeit von n.