Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
Vera Jackisch, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1 – 25.10.2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 08.11.21, 09:00 Uhr

---

Projekt 1 (10 Punkte)**.**

(1) Implementieren Sie ein numerisches Verfahren zur Lösung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= 0 \qquad \text{in } (0,T)\times(0,1) \\ u(t,0) &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in [0,1], \end{aligned}$$

wobei $T = 1$ und $u_0(x) = 1$ für $0.4 \le x \le 0.6$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Verwenden Sie in der Zeit den Vorwärtsdifferenzenquotienten und im Ort den Rückwärtsdifferenzenquotienten. Testen Sie die Diskretisierungsparameter

$$(\Delta t, \Delta x) = 1/80(2,2),\ (\Delta t, \Delta x) = 1/80(2,1),\ (\Delta t, \Delta x) = 1/80(1,2).$$

Überprüfen Sie jeweils, ob die CFL-Bedingung erfüllt ist, und vergleichen Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung der Transportgleichung.

(2) Modifizieren Sie Ihren Code derart, dass Sie ein numerisches Verfahren für

$$\partial_t u + a(x)\partial_x u = 0$$

erhalten, wobei $a : (0,1) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine gegebene Funktion ist. Wie müsste die CFL-Bedingung für nicht konstante Funktionen a formuliert werden? Testen Sie Ihren Code für den Fall $a(x) = (1 + 4x^2)^{1/2}$ und Anfangsbedingungen $u_0(x) = 1$ für $0.05 \le x \le 0.25$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Vergleichen Sie die numerische Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter.

(3) Testen Sie das Programm für $a(x) = -1$ und Anfangsbedingungen wie in (1). Gibt es Paare von Diskretisierungsparametern, die die CFL-Bedingung erfüllen?

(4) Verändern sie Ihren Code, sodass nur Vorwärtsdifferenzenquotienten verwendet werden. Hier sei nun die Randbedingung $u(t,1) = 0$ für $t \in [0,T]$ gegeben. Leiten Sie die CFL-Bedingung für dieses Verfahren her und probieren Sie verschiedene Werte für Δt und Δx aus.

Projekt 2 (10 Punkte)**.**
Das *Upwind-Verfahren* für die Transportgleichung ist definiert durch

$$U_j^{k+1} = \begin{cases} (1-\mu_j^k)U_j^k + \mu_j^k U_{j-1}^k, & \mu_j^k \ge 0, \\ (1+\mu_j^k)U_j^k - \mu_j^k U_{j+1}^k, & \mu_j^k < 0, \end{cases}$$

wobei $\mu_j^k = a(t_k.x_j)\Delta t/\Delta x$. Implementieren Sie dieses Verfahren und testen Sie es für verschiedene Anfangsbedingungen, verschieden Diskretisierungsparameter, die Funktion $a(x) = sin(x)$ und Randbedingungen definiert durch $u(t,0) = u(t,1) = 0$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse und die Gültigkeit einer CFL-Bedingung.