



## Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 – 08.11.2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 22.11.21, 09:00 Uhr

---

**Projekt 1** (10 Punkte). Wir betrachten zu  $T > 0$  die Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$  in  $(0, T) \times (-1, 1)$  mit  $u(0, x) = \cos((\pi/2)x)$ ,  $u(t, -1) = u(t, 1) = 0$  und der Temperaturleitfähigkeit  $\kappa = 1/200$ .

(i) Implementieren Sie ein  $\theta$ -Verfahren zur approximativen Lösung des obigen Anfangsrandwertproblems. Wählen Sie  $\Delta x = 1/20$  und bestimmen Sie experimentell die größte Zeitschrittweite  $\Delta t$ , für die das Verfahren für  $\theta = 0$  stabil ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass die exakte Lösung durch  $u(t, x) = \cos((\pi/2)x)e^{-(\kappa\pi^2/4)t}$  gegeben ist. Bestimmen Sie für das jeweilige Verfahren mit dem Parameter  $\theta = 1/2$ ,  $\theta = 3/4$  und  $\theta = 1$  den Approximationsfehler im Punkt  $(t, x) = (1, 0)$  bei der Wahl von  $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$  für  $j = 2, 3, \dots, 5$ . Erstellen Sie einen Plot aller Fehler in einem Fenster. Verwenden Sie dabei den Befehl `semilogy` anstatt des Befehls `plot`, um eine logarithmische Skalierung der  $y$ -Achse zu erhalten. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(iii) Modifizieren Sie Ihren Code, sodass nun eine Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm  $f$  auf der rechten Seite gelöst wird, d.h.  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = f$  in  $(0, T) \times (-1, 1)$ , wobei  $f(t, x) = (1/20)x^2$ . Berechnen Sie approximative Lösungen zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen und dem Anfangswert  $u_0(x) = 1$ , falls  $-0.1 \leq x \leq 0.1$ , und  $u_0(x) = 0$ , sonst. Vergleichen Sie die numerischen Lösungen für verschiedene Diskretisierungsparameter jeweils für die Verfahren mit  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1/2$  und  $\theta = 1$ .

**Projekt 2** (10 Punkte). (i) Passen Sie Ihr MATLAB-Programm aus Projekt 1 derart an, dass nun die homogene Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u - \kappa \partial_x^2 u = 0$  in  $(0, 5) \times (-1, 1)$  mit  $\kappa = 1/10$ , dem Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{4(0.5+x)(0.5-x)}\right), & \text{falls } |x| < 0.5, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und Neumann-Randbedingungen  $\partial_x u(t, -1) = g_l(t)$  und  $\partial_x u(t, 1) = g_r(t)$  für  $t \in (0, 5]$  mit dem Crank-Nicolson-Verfahren ( $\theta = 1/2$ ) gelöst wird. Verwenden Sie dazu die Differenzenquotienten  $\partial_x^+ U_0^{k+1}$  bzw.  $\partial_x^- U_J^{k+1}$ , um die Ableitungen  $\partial_x u(t_{k+1}, -1)$  bzw.  $\partial_x u(t_{k+1}, 1)$  zu approximieren. Testen Sie Ihr Programm mit homogenen Neumann-Randdaten und den Diskretisierungsparametern  $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$  für  $j = 2, 3, \dots, 5$ . Ist die numerische Lösung sinnvoll? Berechnen Sie die anfängliche Gesamtmasse  $\int_{-1}^1 u_0(x) dx$  mit Hilfe der MATLAB-Funktion `trapz` mit  $10^3 + 1$  Stützstellen. Vergleichen Sie diese jeweils mit der Gesamtmasse der diskreten Lösungen zum Zeitpunkt  $t = 5$ . Benutzen Sie dazu das Anzeigeformat `long`.

(ii) Verwenden Sie jetzt die zentralen Differenzenquotienten  $\hat{\partial}_x U_0^{k+1}$  bzw.  $\hat{\partial}_x U_J^{k+1}$  als Diskretisierung der Ableitungen  $\partial_x u(t_{k+1}, -1)$  bzw.  $\partial_x u(t_{k+1}, 1)$ . Damit diese Approximation an den Randpunkten definiert ist, führen Sie sogenannte *Geisterpunkte*  $x_{-1} = -1 - \Delta x$  und  $x_{J+1} = 1 + \Delta x$  ein. Die Werte  $U_{-1}^0$  und  $U_{J+1}^0$  ergeben sich aus den bekannten Werten  $(U_j^0)_{j=0, \dots, J}$  zusammen mit den diskretisierten Neumann-Bedingungen zur Zeit  $t = 0$ . Berechnen Sie wie in Aufgabenteil (i) die Gesamtmassen der diskreten Lösungen mit Parametern  $\Delta x = \Delta t = 2^{-j}/10$  für  $j = 2, 3, \dots, 5$  zum Zeitpunkt  $T = 5$ , sowie die Abweichung von der

anfänglichen Gesamtmasse. Vergleichen Sie die Abweichungen aus diesem Schema mit den entsprechenden Abweichungen aus Aufgabenteil (i). Was fällt Ihnen auf? Warum ist es sinnvoll,  $\hat{\partial}_x U_0^{k+1}$  und  $\hat{\partial}_x U_J^{k+1}$  anstelle von  $\partial_x^+ U_0^{k+1}$  und  $\partial_x^- U_J^{k+1}$  zu verwenden, um die Neumann-Randbedingungen zu realisieren?