



## Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 3 – 22.11.2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 06.12.21, 09:00 Uhr

---

### Projekt 1 (10 Punkte).

(1) Implementieren Sie das bedingungslos stabile Schema

$$\partial_t^+ \partial_t^- U_j^n = \frac{1}{4} \partial_x^+ \partial_x^- (U_j^{n+1} + 2U_j^n + U_j^{n-1})$$

zur numerischen Lösung der Wellengleichung  $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$  in  $(0, T) \times (0, 1)$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $\partial_t u(0, x) = v_0(x)$  für  $x \in (0, 1)$  zu gegebenen Funktionen  $u_0, v_0 \in C([0, 1])$ . Verwenden Sie dabei eine Diskretisierung des Anfangswertes  $\partial_t u(0, x)$  mittels des zentralen Differenzenquotienten und Geisterpunkten zur Zeit  $-\Delta t$ , sodass Sie quadratische Konvergenz erwarten können. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung  $u(t, x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x)$ . Erstellen Sie Plots, welche die quadratische Konvergenz in Abhängigkeit der Diskretisierungsparameter veranschaulichen.

(2) Überprüfen Sie experimentell, dass die diskrete Energie

$$\Gamma^k = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^{J-1} |\partial_t^+ U_j^k|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J |\partial_x^- U_j^{k+1/2}|^2$$

unabhängig von  $k = 0, \dots, K - 1$  ist. Hierbei ist  $U_j^{k+1/2} = (U_j^{k+1} + U_j^k)/2$ .

**Projekt 2 (10 Punkte).** Der Klang eines Saiteninstrumentes ist charakterisiert durch das auftreten verschiedener Obertöne. Um experimentell zu überprüfen, dass die Wellengleichung Effekte dieser Art beschreibt, betrachten wir eine Saite der Länge  $\ell > 0$ , die zur Zeit  $t = 0$  an einer Stelle  $x_p \in (0, \ell)$  gezupft und dadurch um eine Distanz  $H > 0$  aus ihrer Ausgangsposition ausgelenkt wird. Der Zustand der Saite wird also beschrieben durch

$$u_0(x) = \begin{cases} Hx/x_p & \text{für } x \leq x_p, \\ H(\ell - x)/(\ell - x_p) & \text{für } x > x_p. \end{cases}$$

Wir gehen davon aus, dass der Ton an einer Stelle  $x_s \in (0, \ell)$  aufgegriffen wird, etwa durch das Schallloch im Resonanzkörper einer akustischen Gitarre oder einen elektromagnetischen Tonabnehmer im Fall einer E-Gitarre. Unter der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeit der Saite gleich 0 ist, ergibt sich mittels Trennung der Veränderlichen in der Wellengleichung die exakte Lösung

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos(\omega_m t) \sin(m\pi x)$$

mit  $\omega_m = m\pi c$  und  $c = (\sigma/\rho)^{1/2}$ , wobei  $\rho$  die Dichte und  $\sigma$  die Spannung der Saite beschreibt. Bestimmen Sie mit Ihrem Programm aus Projekt 1 die numerische Lösung der Wellengleichung mit  $c = 2$ ,  $T = 2$ ,  $x_p = 1/8$  und  $H = 1/100$ . Nutzen Sie Ihre Approximationen, um mit

Hilfe der MATLAB-Funktion `dct` für die diskrete Cosinus-Transformation Koeffizienten  $\alpha_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, K$ , zu bestimmen, sodass

$$U_{j_s}^k = \sum_{m=1}^K \alpha_m \cos(\omega_m t_k),$$

wobei  $j_s$  der entsprechende Index zum Gitterpunkt  $x_s = 1/4$  ist. Erstellen Sie Plots der Schwingungen  $w_m(t) = \alpha_m \cos(\omega_m t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, 6$ , als Funktionen von  $t \in [0, T]$ . Veranschaulichen Sie die dominierenden Obertöne, indem Sie die Verteilung der Amplituden in Form der Funktion  $m \mapsto |\alpha_m|$  graphisch darstellen. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten für andere Werte von  $x_p$  und  $x_s$ .