Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
Vera Jackisch, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 4 – 06.12.2021

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 10.01.2022, 09:00 Uhr

---

Projekt 1 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie Näherungslösungen $u_m \in \mathcal{P}_m([0,1])$ des eindimensionalen Poisson-Problems $-u'' = f$ in $\Omega = (0,1)$ mit Randbedingungen $u(0) = u(1) = 1$, indem Sie das Gleichungssystem

$$-u_m''(x_i) = f(x_i), \; i = 1, 2, \dots, m-1, \quad u_m(x_0) = u_m(x_m) = 1,$$

mit $x_i = i/m$ für $i = 0, 1, \dots, m$ numerisch Lösen. Testen Sie das Verfahren für $f(x) = 1$ und $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1/2)$. Untersuchen Sie das Verhalten des Fehlers $\max_{i=0,\dots,m} |u(x_i) - u_m(x_i)|$ sowie die Kondition des Gleichungssystems für $m \to \infty$.

Projekt 2 (10 Punkte)**.** (1) Definieren Sie Funktionen f, g und u_D, sodass $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma_\mathrm{D} = \{0\} \times [0,1], \\ \partial_n u &= g && \text{auf } \Gamma_\mathrm{N} = \partial\Omega \setminus \Gamma_\mathrm{D} \end{aligned}$$

ist. Lösen Sie das Problem numerisch mit einem Finite-Differenzen-Verfahren. Realisieren Sie die Neumann-Randbedingungen, indem Sie geeignete Geisterpunkte einführen und die Ableitungen in Normalenrichtung auf Γ_N mit zentralen Differenzenquotienten approximieren. Vergleichen Sie Ihre numerischen Lösungen mit der exakten Lösung u und verifizieren Sie so die quadratische Konvergenz des Verfahrens.

(2) Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega = B_1(0), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei die Diskretisierung $r_i = (i - \frac{1}{2})\Delta r$, $i = 1, \dots, J+1$, $\vartheta_m = (m-1)\Delta\vartheta$, $m = 1, \dots, K+1$, der Kreisscheibe in Polarkoordinaten für $\Delta r = \frac{2}{2J+1}$, $\Delta\vartheta = \frac{2\pi}{K}$. Drücken Sie den Laplace-Operator in Polarkoodinaten aus und diskretisieren Sie die vorkommenden Ableitungen erster Ordnung mit dem zentralen Differenzenquotienten. Vergleichen Sie Ihre Approximation mit der exakten Lösung $u(x) = (|x|^2 - 1)/4$.

Projekt 3 (10 Punkte)**.** (1) Für das Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ sei eine Triangulierung durch $\mathcal{T}_h = \{T_1, T_2\}$ mit $T_1 = \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ und $T_2 = \operatorname{conv}\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ gegeben. Approximieren Sie das Integral $\int_\Omega f_i \mathrm{d}x$ für die Funktionen $f_1(x) = x_1^2 x_2^2$ und $f_2(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$ durch Quadratur über die Dreieckmittelpunkte und Eckpunkte und mit einer 3-Punkt Gauß-Quadratur.

(2) Mit dem Programm `red_refine` können Sie die Triangulierung verfeinern. Verfeinern Sie das Gebiet bis zu fünf Mal, approximieren Sie mit der verfeinerten Triangulierung das Integral und bestimmten Sie die experimentelle Konvergenzordnungen.