Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
Vera Jackisch, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5 – 10.01.2022

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 24.01.2022, 09:00 Uhr

---

Projekt 1 (15 Punkte)**.** Aufgrund schwieriger Übungsaufgaben haben eine Gruppe Studierender ausnahmsweise keine Zeit und müssen sich von Tiefkühlpizza ernähren. Der Innenraum ihres Backofens ist durch das Gebiet $\Omega = (0, 0.4) \times (0, 0.3) \times (0, 0.4)$ gegeben. Die Temperaturverteilung im Backofen bezeichnen wir mit θ. An der Rückseite $y = 0$ des Ofens beträgt die Temperatur konstant $200°$C. An der Vorderseite $y = 0.3$ des Ofens befindet sich die Klappe. Ist diese geöffnet, so entspricht die Temperatur dort genau der Raumtemperatur ($20°$C). Ist sie geschlossen, so ist der Backofen dort, genauso wie an den anderen beiden Seiten $x = 0$ und $x = 0.4$, perfekt isoliert, d. h. es gilt $\partial_n \theta = 0$. Außerdem ist der Ofen gut vorgeheizt: zur Zeit $t = 0$ beträgt die Temperatur überall $200°$C. Die Studierenden sind sich aber nicht einig, welche der Vorgehensweisen sinnvoller ist, wenn man möglichst wenig Energie verbrauchen möchte.
(i) Der Ofen ist 30 Sekunden geöffnet, dann 30 Sekunden geschlossen und anschließend nochmal 30 Sekunden geöffnet;
(ii) Der Ofen ist erst 30 Sekunden geschlossen und anschließend 60 Sekunden am Stück geöffnet.
Die Studierenden wissen, dass man ein mathematisches Modell erhält, indem man ausnutzt, dass die Wärmedichte w proportional zur Temperaturdichte θ ist, d. h. $w = \rho c_p \theta$, und der Wärmefluss proportional zum Temperaturgradienten ist, d. h. $q = -\kappa \nabla \theta$, und die thermische Energie insgesamt erhalten bleibt, d. h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$. Mit Hilfe des Internets recherchieren Sie, dass vernünftige Parameter für das Modell ungefähr durch die entsprechenden Konstanten für Luft gegeben sind, nämlich die Dichte $\rho = 1.2041\,\mathrm{kg/m^3}$, der Wärmeleitkoeffizient $\kappa = 0.0262\,\mathrm{W/(m\,K)}$ und die spezifische Wärmekapazität $c_p = 1.005 \times 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)}$. Zusammen erschließen sie sich noch, dass man eine Dimensionsreduktion durchführen kann, indem man θ durch den Mittelwert

$$\widetilde{\theta}(t, x, y) = 0.4^{-1} \int_0^{0.4} \theta(t, x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

ersetzt. Allerdings ist keiner von ihnen mehr in Lage, mit Hilfe dieser Informationen die Streitfrage zu beantworten.
Formulieren Sie ein Anfangsrandwertproblem zur Beschreibung der gemittelten Temperaturverteilung $\widetilde{\theta}$ in $\widetilde{\Omega} = (0, 0.4) \times (0, 0.3)$. Implementieren Sie ein Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung des Problems und simulieren Sie damit die Szenarien (i) und (ii). Entscheiden Sie anhand Ihrer Simulation, ob es energietechnisch sinnvoller ist, den Ofen einmal für einen längeren Zeitraum oder zweimal für einen kürzeren Zeitraum zu öffnen. Erläutern Sie die Schwächen des Modells und des numerischen Verfahrens.

Projekt 2 (10 Punkte)**.** Modifizieren Sie das MATLAB-Programm mit dem $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem, sodass das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(K \nabla u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}, \quad (K \nabla u) \cdot n = g \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}},$$

gelöst wird. Dabei sei $K : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ eine stückweise stetige Abbildung, sodass $K(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ symmetrisch und positiv definit ist. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1) \times (0,2)$, $\Gamma_{\mathrm{N}} = \{1\} \times (0,2)$, $\Gamma_{\mathrm{D}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{N}}$, $u(x,y) = x^2 y$ und

$$K(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \sin(x) \\ \sin(x) & 2 \end{bmatrix}.$$