Abteilung für
Angewandte Mathematik

Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
Vera Jackisch, Hedwig Keller

Praktikum zur Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 6 – 24.01.2022

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis Montag, 07.02.2022, 09:00 Uhr

---

Projekt 1 (15 Punkte)**.** Wir betrachten eine Getränkedose in einem Kühlschrank und möchten die Zeit bestimmen, die benötigt wird, um das in der Dose enthaltene Bier auf eine gegebene Temperatur zu kühlen. Dabei machen wir die Annahme, dass das dünne Aluminiumblech, aus dem die Dose besteht, während des betrachteten Zeitraums permanent die gleiche Temperatur hat, die ihrer Umgebungstemperatur im Kühlschrank entspricht. Um ein Modell herzuleiten, das die Temperaturänderung des Bieres beschreibt, benutzen wir, dass die Wärmedichte w proportional zur Temperatur θ ist, d. h. $w = \rho c_p \theta$, dass der Wärmefluss q proportional zum Temperaturgradienten $\nabla\theta$ ist, d. h. $q = -\kappa\nabla\theta$, und dass die Wärmeenergie erhalten bleibt, d. h. $\partial_t w + \operatorname{div} q = 0$ (vgl. Blatt 5, Projekt 1). Verwenden Sie die Werte

$$\rho = 1.009 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \kappa = 0.597\,\mathrm{W/(m\,K)}, \quad c_p = 4.186 \times 10^3\,\mathrm{J/(kg\,K)}$$

für Dichte, Wärmeleitkoeffizient und spezifische Wärmekapazität des Bieres. Eine übliche Bierdose (500 ml) hat einen Durchmesser von 0.067 m und eine Höhe von 0.168 m. Für die Simulation gehen wir davon aus, dass die Dose genau die Form eines entsprechenden Zylinders mit diesen Maßen hat. Nehmen Sie an, dass die Dose aufrecht im Kühlschrank steht bei einer linear verlaufenden Umgebungstemperatur von $1.5°$ C an der Oberseite und $0.5°$ C an der Unterseite der Dose. Implementieren Sie eine P1-Finite-Elemente-Methode mit einem Crank-Nicolson-Verfahren für die Zeitdiskretisierung und bestimmen Sie damit experimentell die Zeit, die nötig ist, um das Bier von einer Ausgangstemperatur von $20°$ C auf eine Trinktemperatur von $3°$ C herunterzukühlen. Diskutieren Sie die Verlässlichkeit des Ergebnisses sowie die Grenzen des mathematischen Modells.
Hinweis: Auf der Vorlesungshomepage finden Sie eine MATLAB-Datei mit einer Triangulierung eines Zylinders in der entsprechenden Größe.

Projekt 2 (5 Punkte)**.** Modifizieren Sie das $P1$-Finite-Elemente-Verfahren für das Poisson-Problem von Blatt 5, Projekt 2, sodass nun das Robin-Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u + \alpha\partial_n u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

gelöst wird. Testen Sie Ihren Code mit $\Omega = (0,1)^2$, $\alpha = 2$, und $u(x,y) = x^2 + y^2$.