Abteilung für Angewandte Mathematik 18.10.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 1

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 25.10.2021 um 12:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws21/tun0`

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung her, die den Transport einer Substanz durch einen langen, dünnen Schlauch beschreibt, wobei zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ eine zusätzliche Menge der Substanz injiziert werden kann, die durch eine Funktion $f(t, x)$ beschrieben wird, welche die Anzahl der injizierten Teilchen pro Volumeneinheit beschreibt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** Sei u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t u + a(t, x)\partial_x u = 0.$$

(i) Eine Charakteristik der Gleichung ist eine Kurve $(t, \gamma(t))$, wobei γ die Lösung des Anfangswertproblems für die gewöhnliche Differentialgleichung $\gamma'(t) = a(t, \gamma(t))$ mit $\gamma(0) = x_0$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass u konstant ist entlang der Charakteristiken.
(ii) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der Gleichung jeweils für $a(t, x) = x$ und $a(t, x) = 2t$ und geben Sie jeweils eine Lösung zur Anfangsbedingung $u_0(x) = \cos(x)$ an.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass für den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung die Gleichung $\partial^+\partial^- = \partial^-\partial^+$ gilt.
(ii) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $u : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Abschätzungen für Differenzenquotienten:

$$|\hat{\partial} u(x_j) - u'(x_j)| \le \frac{\Delta x^2}{6}\|u'''\|_{C(I)}, \text{ falls } u \in C^3(I),$$
$$|\partial^+\partial^- u(x_j) - u''(x_j)| \le \frac{\Delta x^2}{12}\|u^{(4)}\|_{C(I)}, \text{ falls } u \in C^4(I).$$

Nehmen Sie dabei $x_{j+1}, x_j, x_{j-1} \in I$ und $\Delta x = x_{j+1} - x_j = x_j - x_{j-1}$ an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Upwinding-Schema für die Transportgleichung äquivalent zum Schema

$$\partial_t^+ U_j^k + a_j^k \hat{\partial}_x U_j^k = |a_j^k| \frac{\Delta x}{2} \partial_x^+ \partial_x^- U_j^k$$

ist.