Abteilung für Angewandte Mathematik 25.10.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 2

Abgabe: Briefkästen RZ bis Dienstag, den 02.11.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter Anfangsdaten, dass das Finite-Differenzen-Verfahren $U_j^{k+1} = U_j^k - \mu(U_j^k - U_{j-1}^k)$ mit $\mu = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ instabil ist, falls $\mu > 1$ gilt.
(ii) Überprüfen Sie die Gültigkeit der CFL-Bedingung sowie der Abschätzung

$$\sup_{j=0,\dots,J} |U_j^{k+1}| \leq \sup_{j=0,\dots,J} |U_j^k|$$

für die folgenden Verfahren für die Transportgleichung:

$$\partial_t^+ U_j^k - \partial_x^- U_j^k = 0, \quad \partial_t^+ U_j^k + \partial_x^+ U_j^k = 0, \quad \partial_t^+ U_j^k + \widehat{\partial}_x U_j^k = 0.$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem in $L^2(-\pi, \pi)$ definieren, d. h., dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x)\overline{\phi_l(x)}\,\mathrm{d}x = \delta_{kl}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt.
(ii) Für $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_k(x)}\,\mathrm{d}x$. Beweisen Sie die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Da man zeigen kann, dass das obige Orthonormalsystem vollständig ist, gilt hier sogar Gleichheit („*Parsevalsche Gleichung*“).

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $u \in C^2([0, T] \times [\alpha, \beta])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \kappa\partial_x^2 u = 0$. Zeigen Sie, dass für passend gewählte Parameter $\tau, L, x_0 > 0$ die Funktion $\widetilde{u}(s, y) = u(\tau s, Ly + x_0)$ eine Lösung von $\partial_s \widetilde{u} - \partial_y^2 \widetilde{u} = 0$ in $(0, T') \times (0, 1)$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Leiten Sie ein mathematisches Modell für einen Diffusionsprozess her, das auch Quellen und Senken der diffundierenden Substanz berücksichtigt, die durch die Funktion $f \in C([0, T] \times [0, 1])$ beschrieben werden.
Bemerkung: 'Quellen' und 'Senken' bedeuten hier, dass an Stellen $x \in [0, 1]$ Masse zusätzlich zu- und abfließen kann. Bei der in der Vorlesung hergeleiteten Wärmeleitungsgleichung war dies nur an den Enden des betrachteten Intervalls der Fall.