Abteilung für Angewandte Mathematik 08.11.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 4

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 15.11.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere die Bandmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als

$$M = \begin{bmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass M die Eigenwerte $\lambda_p = a + 2b\cos(p\pi/(n+1))$ und die Eigenvektoren v_p mit $(v_p)_j = \sin(pj\pi/(n+1))$ jeweils für $p, j = 1, 2, \dots, n$ besitzt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die θ-Methode für jede Wahl von θ und jede Wahl von $\Delta t, \Delta x > 0$ wohldefiniert ist.
(ii) Zeigen Sie, dass die θ-Methode instabil ist, wenn $\theta < 1/2$ und $\lambda = \Delta t/\Delta x^2 > \frac{1}{2}\frac{1}{1-2\theta}$ gilt.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Sei $u \in C^2([0,T]\times\mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ mit Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}(\xi,\eta) = u(t,x)$ mit den neu eingeführten Variablen $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ die Gleichung $\partial_\xi\partial_\eta\widetilde{u} = 0$ erfüllt.
(ii) Folgern Sie, dass $\widetilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ und schließen Sie daraus, dass es stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ gibt, sodass $u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$. Geben Sie Funktionsterme für f und g in Abhängigkeit von u_0 und v_0 an.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)**.** (i) Beweisen Sie das Prinzip der Energieerhaltung für die Wellengleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen.
(ii) Leiten Sie daraus die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichung sowohl für homogene Dirichlet- als auch für homogene Neumann-Randbedingungen her.