Abteilung für Angewandte Mathematik 15.11.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 5

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 22.11.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**.** (i) Bestimmen Sie die Funktionen $u_n(t,x) = v_n(t)w_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, die die Wellengleichung auf $(0,T) \times (0,1)$ unter Berücksichtigung von homogenen Dirichlet-Randbedingungen lösen.
(ii) Seien $u_0, d_0 \in C([0,1])$ definiert durch

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sin(n\pi x), \quad d_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \sin(n\pi x),$$

mit gegebenen Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Leiten Sie unter der Verwendung von (i) eine Formel für die Lösung der Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0$ auf $(0,T)\times(0,1)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen sowie Anfangsbedingungen $u(0,x) = u_0(x)$ und $\partial_t u(0,x) = d_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$ her.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass der Konsistenzfehler des impliziten Differenzenverfahrens für die Wellengleichung von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ ist.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.** Für $J \in \mathbb{N}$ sei $\Delta x = 1/J$ und $V, W \in \mathbb{R}^{J+1}$.
(i) Beweisen Sie die diskrete Produktregel

$$\partial_x^-(W_j V_j) = W_j(\partial_x^- V_j) + (\partial_x^+ W_{j-1})V_{j-1}.$$

(ii) Folgern Sie daraus die Formel für die partielle Summation,

$$\Delta x \sum_{j=0}^{J-1} (\partial_x^+ W_j)V_j = -\Delta x \sum_{j=1}^{J} W_j(\partial_x^- V_j) + W_J V_J - W_0 V_0,$$

und erläutern Sie den Zusammenhang zur Formel für die partielle Integration von Funktionen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen, die für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die folgende Rekursion erfüllt:

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_{k-1} \\ \xi_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Angenommen die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A erfüllen die Eigenschaft $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert, sodass $|\xi_k| \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.