Abteilung für Angewandte Mathematik 22.11.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 6

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 29.11.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (1+1+1+2 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig (partiell) differenzierbar. Wir schreiben $\partial_i = \partial_{x_i}$ für die i-te partielle Ableitung. Verwenden Sie die Definitionen

$$\operatorname{div} v = \sum_i \partial_i v_i, \quad \operatorname{grad} f = [\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f]^\top, \quad \Delta f = \sum_i \partial_i^2 f,$$
$$\operatorname{rot} v = [\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1]^\top, \quad \Delta v = [\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3]^\top,$$

um folgende Identitäten zu beweisen:
(i) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$, (ii) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, (iii) $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$, (iv) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} v = \operatorname{grad} \operatorname{div} v - \Delta v$.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** (i) Zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichne n die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ die Gültigkeit der Identitäten

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n \, \mathrm{d}s = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + v \Delta u \right) \mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega \left(u \Delta v - v \Delta u \right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u \nabla v \cdot n - v \nabla u \cdot n \right) \mathrm{d}s.$$

(ii) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ Lösungen des Randwertproblems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

gilt, und schließen Sie daraus, dass $u_1 = u_2$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei S^n der Flächeninhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre (also z.B. für $n = 1$ ist $S^1 = 2\pi$ für den Einheitskreis und für $n = 2$ entsprechend $S^2 = 4\pi$ für die Einheitskugel-Oberfläche). Für $n \geq 2$ sei die Funktion $s_n : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$s_n(x) = -\frac{1}{S^{n-1}} \begin{cases} \ln|x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)} & \text{für } n > 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ punktweise $\Delta s_n = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Systemmatrix, die zur Finite-Differenzen-Diskretisierung des Poisson-Problems mit homogenen Randbedingungen gehört. Benutzen Sie das diskrete Maximumsprinzip, um zu zeigen, dass alle Einträge von A^{-1} nicht-negativ sind.