Abteilung für Angewandte Mathematik 29.11.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 7

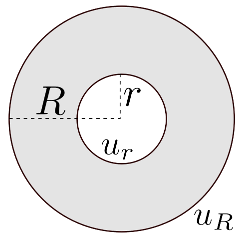
Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 06.12.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein quadratisches Polynom und $\Delta x = 1/J$ für ein $J \in \mathbb{N}$. Für $j, m \in \mathbb{Z}^2$ seien $x_{j,m} = (j, m)\Delta x$ und $W_{j,m} = w(x_{j,m})$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta_h W_{j,m} := \partial^+_{x_1}\partial^-_{x_1} W_{j,m} + \partial^+_{x_2}\partial^-_{x_2} W_{j,m} = \Delta w(x_{j,m})$$

für alle $j, m \in \mathbb{Z}^2$ gilt.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)**.** Wir betrachten die stationäre Verteilung der Wassertemperatur u in einem ringförmigen Schwimmbecken mit Innendurchmesser $r > 0$ und Außendurchmesser $R > r$ (vgl. Skizze) unter der Annahme, dass die Temperatur nicht von der Wassertiefe abhängt. Durch ein Heizsystem seien dabei die Temperaturen u_r am inneren und u_R am äußeren Rand gegeben.



(i) Formulieren Sie ein zweidimensionales Randwertproblem, durch das die Temperaturverteilung u bestimmt ist.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$\Delta(g \circ \rho) = g''(\rho) + \rho^{-1} g'(\rho) = \rho^{-1}\big(\rho g'(\rho)\big)'$$

für $g \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $\rho(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ gilt und rechfertigen Sie die Annahme $u = \widetilde{u} \circ \rho$ für die Lösung u des Problems aus (i).
(iii) Lösen Sie das Problem für ein Schwimmbecken mit $r = 4$, $R = 8$, $u_r = 30$ und $u_R = 20$. Auf welcher Kreisbahn sollten Sie schwimmen, wenn Ihre bevorzugte Badewassertemperatur 25°C beträgt?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d. h., für jedes $z \in U$ existiere $f'(z) \in \mathbb{C}$, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z),$$

wobei $h \to 0$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen darstellt, welche gegen 0 konvergiert. Die Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Zeigen Sie, dass für die partiellen Ableitungen die Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

in U gelten und dass u und v harmonisch in U sind, d. h., dass $-\Delta u = 0$ und $-\Delta v = 0$ in U gilt.

Aufgabe 4 (2+2+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen und geben Sie jeweils eine knappe Begründung Ihrer Wahl an:

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \Delta u &= f && \text{in } (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d, \\
\partial_{x_1}^2 u - 3\partial_{x_1}\partial_{x_2} u + \partial_{x_2}^2 u &= 0 && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2} u &= f && \text{in } (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$