Abteilung für Angewandte Mathematik 06.12.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 8

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 13.12.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega = (0,1)^2$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ gegeben als

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \alpha_{m,n} \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2).$$

Berechnen Sie $-\Delta u_{m,n}$ für $u_{m,n}(x_1,x_2) = \sin(\pi m x_1)\sin(\pi n x_2)$ und konstruieren Sie daraus die Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

glatt ist, d. h., dass $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt.
(ii) Sei $u \in C(\Omega)$ und es gelte $\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $v \in C^\infty(\Omega)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass dann $u = 0$ in Ω gilt.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $u \in C^2(\Omega)$ sei $\widetilde{u}(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi)$.
(i) Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Darstellung

$$\Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = \partial_r^2 \widetilde{u}(r,\phi) + r^{-1}\partial_r \widetilde{u}(r,\phi) + r^{-2}\partial_\phi^2 \widetilde{u}(r,\phi).$$

gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}(r,\phi) = r^{2/3}\sin(\frac{2}{3}\phi)$ harmonisch ist. Handelt es sich dabei um eine klassische Lösung der Poissongleichung auf $\Omega = \{r(\cos\phi, \sin\phi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi\}$? Begründen Sie!

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
(i) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $Ax = b$ genau dann löst, wenn

$$(Ax)^\top y = b^\top y$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt.
(ii) Nehmen Sie an, dass A symmetrisch und positiv definit ist. Zeigen Sie, dass dann eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass x genau dann Minimierer der Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{2}|Bz|^2 - b^\top z$$

ist, wenn x das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.