Abteilung für Angewandte Mathematik 13.12.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 9

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 20.12.2021 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I(u) = \int_{-1}^{1} x^2 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

mit den Randbedingungen $u(-1) = -1$ und $u(1) = 1$ keinen Minimierer in $C^1((-1,1))$ besitzt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und $\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$ nicht leer. Zeigen Sie, dass

$$\|v\| = \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$$

eine Norm auf $V = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = 0\}$ definiert und folgern Sie, dass die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung höchstens eine Lösung haben kann.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $V = C^1(I)$.
(i) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,\infty})$ mit

$$\|v\|_{V,\infty} = \sup_{x\in I} |v(x)| + \sup_{x\in I} |v'(x)|$$

ein Banachraum ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{V,1})$ mit

$$\|v\|_{V,1} = \int_I |v(x)| + |v'(x)| \,\mathrm{d}x$$

kein Banachraum ist.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass die bilineare Abbildung $a : (x,y) \mapsto x^\top My$ die Bedingungen des (i) Rieszschen Darstellungssatzes und (ii) des Lax-Milgram-Lemmas erfüllt.