Abteilung für Angewandte Mathematik 20.12.2021
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 10

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 10.01.2022 um 12:00 Uhr

Wie jedes Jahr will der Weihnachtsmann den Kindern eine Freude machen, doch natürlich hält er sich auch vorbildlich an die geltende Corona-Verordnung. Da er den Kindern aber eine Erfahrung wie immer bescheren möchte, will er sein Vorgehen etwas anpassen. Normalerweise bringt er seine Lieblings-Ingwer-Plätzchen mit, die die Kinder schon von weitem riechen können, und er klingelt mit einem Glöckchen, um seine Ankunft anzukündigen. Wenn die Kinder nun nicht, wie sonst, einen Meter Abstand zu ihm haben, sondern zwei Meter Abstand - wie viel lauter muss der Weihnachtsmann mit dem Glöckchen klingeln und wie viel intensiver müssen die Plätzchen duften, damit die Kinder die gleiche Erfahrung wie zu einem Weihnachten vor der Pandemie bekommen können? Zum Glück weiß der Weihnachtsmann, dass er sich auf einige fleißige Mathe-Wichtel verlassen kann, die für ihn diese Probleme modellieren und ihm helfen können, Weihnachten zu retten...

Aufgabe 1 (Kling, Glöckchen, kling: 3+2 Punkte + 3 Bonuspunkte)**.** Zur Modellierung des weihnachtlichen Glöckchens betrachten wir die dreidimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(0,x) = v_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

mit Anfangswerten $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$.
(i) Im eindimensionalen Fall haben Sie bereits die *d'Alembertsche Formel* kennengelernt. Für den dreidimensionalen Fall kann durch ein ähnliches Vorgehen die *Kirchhoffsche Formel* für die Lösung $u(t,x)$ des obigen Problems hergeleitet werden:

$$u(t,x) = t \fint_{\partial B_t(x)} v_0(s)\,\mathrm{d}s + \partial_t \left(t \fint_{\partial B_t(x)} u_0(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

mit $\fint_K \,\mathrm{d}x = |K|^{-1} \int \,\mathrm{d}x$ dem Integralmittel. Zeigen Sie, dass für diese Funktion gilt

$$u(t,x) = \fint_{\partial B_t(x)} t v_0(s) + u_0(s) + \nabla u_0(s)\cdot(s-x)\,\mathrm{d}s.$$

(ii) Anhand der Kirchhoffschen Formel sieht man, dass sich die Intensität bei einer gegebenen Punktquelle auf Sphären ausbreitet. Nutzen Sie diese Eigenschaft und das Prinzip der Energieerhaltung, um das Problem des Weihnachtsmanns zu lösen: Wie viel lauter muss er klingeln, wenn die Kinder nicht einen Meter, sondern zwei Meter von der Schallquelle entfernt sind und bei ihnen dieselbe Intensität ankommen soll?
(iii) Versuchen Sie, die theoretische Erkenntnis aus (ii) experimentell nachzuprüfen, dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse und diskutieren Sie die Grenzen des Modells (3 Bonuspunkte).

Aufgabe 2 (In der Weihnachtsbäckerei: 3+2 Punkte + 3 Bonuspunkte)**.** Wir nehmen an, die Geruchsintensitätsverteilung der Plätzchen ist stationär und eine Lösung des dreidimensionalen Poisson-Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^3.$$

(i) In einer früheren Übungsaufgabe haben Sie bereits die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung kennengelernt:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln x, & n = 2 \\ \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\sigma_{n-1}} & n > 2 \end{cases}$$

mit σ_{n-1} dem Flächeninhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre. Wir wissen, dass $-\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ erhalten wir eine Lösung des obigen Poisson-Problems durch Faltung mit der Fundamentallösung:

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Formal schreibt man auch

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

mit δ_0 der Dirac'schen Delta-Distribution auf $\mathbb{R}^n$ in $x = 0$. Zeigen Sie damit formal, dass für $u = \Phi * f$ gilt $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.
(ii) Betrachten Sie nun den Fall $n = 3$ und eine Punktquelle im Ursprung. Aus der Fundamentallösung können Sie das qualitative Verhalten der Lösung ablesen und so dem Weihnachtsmann helfen: Wie viel intensiver müssen die Kekse in diesem Modell duften, wenn die Kinder statt einem Meter jetzt zwei Meter entfernt von den Plätzchen stehen und bei ihnen dieselbe Intensität ankommen soll?
(iii) Können Sie die obige Erkenntnis experimentell verifizieren? Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse und diskutieren Sie die Grenzen des Modells (3 Bonuspunkte).

Aufgabe 3 (Gibt es manche Leckerei: 3+2 Punkte)**.** Wir betrachten nun einen anderen Ansatz, um das Plätzchen-Problem des Weihnachtsmanns zu lösen. Diesmal betrachten wir die dreidimensionale Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

In diesem Fall wird nur eine Anfangskonzentration gegeben und für $t > 0$ ist keine Quelle vorhanden, aus der weiterer Keksduft nachströmt. Der Weihnachtsmann hat also seine Keksdose schnell wieder geschlossen, und nur die schon vorhandene Kekskonzentration u_0 breitet sich aus.
(i) Die Fundamentallösung $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ der n-dim. Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right).$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\partial_t \Phi - \Delta\Phi = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Bem.: Formal schreibt man auch $\Phi(0, x) = \delta_0(x)$. Wir können durch Faltung $(\Phi * u_0)(x)$ Lösungen der homogenen Diffusionsgleichung mit beliebigen Anfangsdaten u_0 erhalten.
(ii) Bestimmen Sie anhand der Fundamentallösung, wie viel intensiver die Plätzchen in diesem Modell duften müssen, wenn die Kinder statt einem Meter jetzt zwei Meter von der Quelle entfernt sind und sie jeweils zum Zeitpunkt $t = 1$ die gleiche Intensität erfahren sollen.

Quiz (5 Punkte)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Sie sollten Ihre Entscheidung im Tutorat begründen können.

Für eine C^2 Funktion approximiert der zentrale Differenzenquotient $\widehat{\partial}$ die Ableitung besser als die einseitigen Differenzenquotienten $\partial^{\pm}$.	
In der Implementierung des Verfahrens $\partial_t^+ U_j^k + a\partial_x^- U_j^k = 0$ muss man in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.	
Die CFL-Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Stabilität eines Finite-Differenzen-Verfahrens.	
Das θ-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung ist explizit für $\theta < \frac{1}{2}$ und implizit für $\theta \geq \frac{1}{2}$.	
Das implizite Verfahren für die Wellengleichung erfüllt ein diskretes Maximumprinzip.	
Wenn $f = 0$ ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ konstant.	
Für $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Gamma_D = \partial\Omega$ und $u_D = 0$ besitzt das Poisson-Problem eine klassische Lösung.	
Jeder endlich-dimensionale Teilraum eines beliebigen Banachraums ist abgeschlossen.	
Lineare Operatoren zwischen endlich-dimensionalen Räumen sind immer stetig.	
Die Funktion $\phi\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{sign}(x)$ ist schwach differenzierbar.	

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!