Abteilung für Angewandte Mathematik 10.01.2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 11

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 17.01.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv semidefinite und symmetrische Bilinearform. Beweisen Sie die Gültigkeit der Abschätzung

$$a(v,w) \leq \big(a(v,v)\big)^{1/2}\big(a(w,w)\big)^{1/2}$$

für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**.** Beweisen Sie die Produkt- und Kettenregel für schwache Ableitungen:
(i) Falls $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, dann ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ und $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.
(ii) Sei Ω beschränkt. Falls $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|g'| < C$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, dann ist $\widetilde{u} = g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla\widetilde{u} = g'(u)\nabla u$.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{r(\cos\varphi, \sin\varphi) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, $\Gamma_D = \partial\Omega$ und

$$u_D = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi \in \{0, 3\pi/2\}, \\ \sin(2\varphi/3), & \text{falls } r = 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass für $f = 0$ durch

$$u(r,\varphi) = r^{(2/3)}\sin(2\varphi/3)$$

eine schwache Lösung des Poisson-Problems auf Ω gegeben ist.
(ii) Zeigen Sie anhand des Beispiels aus (i), dass das Poisson-Problem im Allgemeinen nicht H^2-regulär ist, wenn das Lösungsgebiet nicht konvex ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Für $j \in \mathbb{N}$ sei $v_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $v_{j,n} = \delta_{j,n}$, d. h.

$$v_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

wobei die 1 an der j-ten Stelle steht. Zeigen Sie, dass die Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist und bestimmen Sie den schwachen Grenzwert.