Abteilung für Angewandte Mathematik 17.01.2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 12

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 24.01.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)**.** (i) Leiten Sie eine schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_D & \text{auf } \Gamma_D, \\ (K\nabla u)\cdot n = g & \text{auf } \Gamma_N \end{cases}$$

her, wobei $K \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$, $b \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ und $c \in C(\bar{\Omega})$.
(ii) Bestimmen Sie Bedingungen an die Koeffizienten K, b und c, sodass die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ garantiert ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega = (0,1)^2$ und $V_h = \operatorname{span}\{\phi_{j,k} : j,k = 1,2,\dots,N\}$ die lineare Hülle der Funktionen

$$\phi_{j,k}(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1 j/N)\sin(\pi x_2 k/N)$$

für $j,k = 1,2,\dots,N$. Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix der aus dem Laplace-Operator resultierenden Bilinearform.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $u \in C^3(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$|\Delta u|^2 - |D^2 u|^2 = \operatorname{div}(\nabla u \Delta u - \frac{1}{2}\nabla|\nabla u|^2).$$

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)**.** Sei $T = \operatorname{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_d\}$ ein Simplex mit positiv orientierten Eckpunkten $z_0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{R}^d$ und sei

$$X_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Volumen von T durch $|T| = (1/d!)\det X_T$ gegeben ist.
(ii) Beweisen Sie, dass die Gradienten der nodalen Basisfunktionen auf T die Gleichung

$$[\nabla\varphi_{z_0}|_T, \dots, \nabla\varphi_{z_d}|_T]^\top = X_T^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_d \end{bmatrix}$$

erfüllen. Die nodalen Basisfunktionen $(\varphi_{z_i})_{i=0,\dots,d}$ auf T sind definiert durch $\varphi_{z_i}(z_j) = \delta_{ij}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel und die Tatsache, dass die nodale Basisfunktion zum Knoten z_j für $x \in T$ durch

$$\varphi_{z_j}(x) = \frac{1}{d!|T|}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & z_{j+1} & \dots & z_{j+d} \end{bmatrix}$$

gegeben ist, wobei die Indizes modulo d zu verstehen sind.