Abteilung für Angewandte Mathematik 24.01.2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 13

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 31.01.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei V ein Hilbertraum, $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und koerzive Bilinearform, welche zusätzlich symmetrisch ist, und sei $b\colon V \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. Sei ferner $V_h \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum und $u_h \in V_h$ die eindeutige Galerkin-Approximation von $u \in V$ mit $a(u,v) = b(v)$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Quasi-Bestapproximations-Eigenschaft im Céa-Lemma mit der Konstanten $(k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}}$ gilt, also dass

$$\|u - u_h\|_V \le (k_a/\alpha)^{\frac{1}{2}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V.$$

Dabei sind k_a und α die Beschränktheits- und Koerzivitätskonstante der Bilinearform a.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, konvexes Lipschitzgebiet. Beweisen Sie konstruktiv die Existenz einer Konstanten $c_p > 0$, sodass

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le c_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $v \in C^1(\Omega)$ und verwenden Sie den Mittelwertsatz, um $v(x)$ für $x \in \Omega$ als Integral über Ω darzustellen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $\hat{T} = \mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\}$ mit der kanonischen Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ des $\mathbb{R}^d$ und sei $T = \mathrm{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_d\} \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht-degenerierter Simplex in $\mathbb{R}^d$. Sei $\Phi_T : \hat{T} \to T$ ein affiner Diffeomorphismus mit $\Phi_T(0) = z_0$ und $\Phi_T(e_j) = z_j$ für $j = 1, 2, \dots, d$. Zeigen Sie, dass

$$D(\Phi_T^{-1}) = (D\Phi_T)^{-1}$$

gilt und dass beide Matrizen unabhängig von $x \in T$ und $\hat{x} \in \hat{T}$ sind.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)**.** Für ein Dreieck $T \subset \mathbb{R}^2$ mit Ecken $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ seien $z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{R}^2$ die Mittelpunkte der Seiten von T.
(i) Zeigen Sie, dass $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$ mit $\mathcal{K} = \{\chi_j : j = 0, 1, \dots, 5\}$ für $\chi_j(\phi) = \phi(z_j)$, $j = 0, 1, \dots, 5$, ein finites Element ist.
(ii) Konstruieren Sie die nodale Basis des Elements $(T, \mathcal{P}_2(T), \mathcal{K})$.