Abteilung für Angewandte Mathematik 31.01.2022
Prof. Dr. Sören Bartels, Prof. Dr. Michael Růžička
M.Sc. Vera Jackisch

Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/2022 – Blatt 14 (Bonusblatt/Klausurvorbereitung)

Abgabe: Briefkästen RZ bis Montag, den 07.02.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+3 Bonuspunkte). Sei $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ eine Folge von Triangulierungen des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit maximaler Gitterweite $h \to 0$ und sei $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P^1(T)\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$.
(i) Zeigen Sie, dass die Vereinigung $\bigcup_{h>0} \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ dicht ist im Raum $H^1(\Omega)$.
(ii) Beweisen Sie (ohne Bestimmung einer Konvergenzrate), dass die Galerkin-Approximationen des Poisson-Problems auch ohne zusätzliche Regularitätsannahmen immer gegen die exakte Lösung konvergieren.

Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte). Wir betrachten die eindimensionale Poisson-Gleichung auf dem Intervall $\Omega = (0,1)$ mit Nullrandwerten auf $\Gamma_D = \{0,1\}$ und rechter Seite $f \in C(\bar{\Omega})$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1/n} = \{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] : k = 1, \dots, n\}$ eine Triangulierung von Ω. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die diskrete Lösung mit dem Finite-Differenzen-Verfahren unter Verwendung des zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung mit der P1-Finite-Elemente-Approximation übereinstimmt, wenn in letzterer die rechte Seite via

$$\int_\Omega f\varphi_z \,\mathrm{d}x \approx \int_\Omega \mathcal{I}_h^1[f\varphi_z] \,\mathrm{d}x$$

numerisch integriert wird.

Aufgabe 3 (15 Bonuspunkte). Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung der Vorlesungsinhalte. Widmen Sie jedem Kapitel ca. eine Seite. Verwenden Sie dabei die folgenden Schlüsselwörter und geben Sie bei Bedarf Beispiele an:
1. Finite-Differenzen-Verfahren: *CFL-Bedingung, implizite/explizite Verfahren, Konsistenz, Stabilität, Konvergenz.*
2. Elliptische partielle Differentialgleichungen: *Singularitäten, Differenzierbarkeit, schwache Formulierung, Sobolev-Raum, Existenz/Eindeutigkeit schwacher Lösungen.*
3. Finite-Elemente-Methode: *Galerkin-Approximation, nodale Basis, Interpolation, Fehlerabschätzung, Maximumprinzip.*

Quiz (5 Bonuspunkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Sie sollten Ihre Entscheidung im Tutorat begründen können.

Es existiert eine Konstante $c > 0$, sodass für alle stückweisen Polynome $v \in H^1(\Omega)$ die Ungleichung $\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \le c\|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ erfüllt ist.	
Für alle $v \in H^3(T)$ existiert ein $q \in \mathcal{P}_2(T)$ mit $\|\nabla(v-q)\|_{L^2(T)} \le ch_T^2\|D^3 v\|_{L^2(T)}$.	
Die P1-Finite-Elemente-Methode für das Poisson-Problem erfüllt das diskrete Maximumsprinzip.	
Für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ gilt $\|v_h\|_{L^4(\Omega)} \le c\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}$.	
Falls die Lösung u des Poisson-Problems $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ erfüllt, dann gilt $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le ch^2\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$ für die Galerkin-Approximation $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$.	