Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber 30. Oktober 2024

Numerik I

WiSe 2024/2025 — Blatt 2

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Abgabe: 13.11.2024, 14:00 Uhr.

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, d.h es gelte $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ die $k\times k$-Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ebenfalls positiv definit ist.

(iii) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

(iv) Folgern Sie, dass positiv definite Matrizen eine eindeutige LU-Zerlegung besitzen. Sie dürfen sich dafür auf einen passenden Satz im Skript berufen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die invertierbaren (normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen und gilt $\det(L) \neq 0$, so sind L^{-1} und L_1L_2 ebenfalls (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $\det(A) \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie $\mathrm{cond}_1(A)$, $\mathrm{cond}_2(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und diskutieren Sie, für welche Verhältnisse von a, b und c die zugehörigen linearen Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind.

Aufgabe 4 (1+2+2+1 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer alternativen Herangehensweise, um die Kreiszahl π zu approximieren. Dafür sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$I(n) := \int_0^\pi \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

definiert. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie $I(0)$ und $I(1)$ und zeigen Sie, dass für $n \ge 2$ die folgende Formel gilt:

$$I(n) = \frac{n-1}{n} I(n-2)$$

Hinweis: Partielle Integration

(ii) Verwenden Sie die erste Teilaufgabe, um die folgenden Formeln für $n \ge 1$ herzuleiten:

$$I(2n) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\cdot\pi = \pi\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

$$I(2n+1) = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\cdot 2 = 2\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

(iii) Zeigen Sie, dass

$$I(2n+1) \leq I(2n) \leq I(2n-1)$$

gilt. Folgern Sie, dass $I(2n)/I(2n+1)$ für große n gegen 1 konvergiert.

Hinweis: Einschnürrungssatz.

(iv) Folgern Sie, dass

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

gilt.