Numerik I

WiSe 2024/2025 — Blatt 3

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Abgabe: 27.11.2024, 14:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(i) Wie lässt sich die LU-Zerlegung im Fall symmetrischer Matrizen vereinfachen und welcher Aufwand ergibt sich?

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit Bandweite m, das heißt es gelte $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > m$. Wie groß ist der Aufwand der Berechnung der LU-Zerlegung, sofern diese existiert?

Aufgabe 2 (1+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die reguläre Matrix $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine normalisierte LU-Zerlegung und keine Cholesky-Zerlegung besitzt.

(ii) Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass die Matrix PA eine normalisierte LU-Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [-31, -21, -90, 50]^\top$ und berechnen Sie $\det(A)$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und es gelte $A = QR$, mit einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einer Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$, für die $Q^\top Q = Id_m$ und $\det Q = 1$ gelte.

(i) Zeigen Sie, dass R eine Cholesky-Zerlegung von $A^\top A$ definiert.

(ii) Sei $m = n$ und A regulär. Zeigen Sie, dass $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R)$.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

(i) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte normalisierte untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit positiven Diagonaleinträgen existieren, sodass $A = LDL^\top$ gilt.

(ii) Entwickeln Sie ein Verfahren zur Bestimmung von L und D, das die Verwendung der Wurzelfunktion vermeidet, und bestimmen Sie die Matrizen L und D für

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix}.$$