Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber 27. November 2024

Numerik I

WiSe 2024/2025 — Blatt 4

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Abgabe: 11.12.2024, 14:00 Uhr.
Ankündigung: Am 04.12. besteht ab 15:30 Uhr die Möglichkeit, Fragen zum bisherigen Stoff der Vorlesung zu stellen und Kommentare zum Übungs- und Praktikumsbetrieb zu äußern. Wir freuen uns auf Ihre Rückmeldungen!

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$t \mapsto \|A(x+ty) - b\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

und folgern Sie die Gaußsche Normalengleichung, falls x eine Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems ist, d.h. $x = \min_{z\in\mathbb{R}^n} \|Az - b\|_2^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_n - 2vv^\top$.

(i) Zeigen Sie, dass $P = P^\top$ und $P^{-1} = P$ gelten.

(ii) Zeigen Sie, dass eine reelle $n \times n$ Householder-Matrix $n-1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.

(iii) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $n = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^n$ abbildet.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe des Householder-Verfahrens eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = b$ für $b = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ sei die daraus durch das Gram-Schmidt-Verfahren gewonnene Orthonormalbasis, das heißt

$$\tilde{q}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (a_j^\top q_k) q_k, \qquad q_j = \frac{\tilde{q}_j}{\|\tilde{q}_j\|_2} \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

(i) Sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $r_{kj} = a_j^\top q_k$ für $k < j$, $r_{kj} = 0$ für $k > j$ und $r_{jj} = \|\tilde{q}_j\|_2$ $(j = 1, \ldots, n)$. Zeigen Sie, dass dann $A = QR$ gilt.

(ii) Berechnen Sie Q und R für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$