Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber 11. Dezember 2024

Numerik I

WiSe 2024/2025 — Blatt 5

`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html`

Abgabe: 08.01.2025, 14:00 Uhr.
Ankündigung: Zum Abschluss des Numerik-Jahres wird Jonathan Brugger am Ende der letzten Vorlesung eine weihnachtliche Anwendung der Numerik von Eigenwertproblemen präsentieren.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = (4,1,2,3)^\top$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(i) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $V^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+A = P_{(\ker A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\operatorname{Im} A}$.

Aufgabe 3 (2+4+1+1 Punkte)
Wir betrachten das folgende lineare Problem:

$$\begin{gathered} A \in \mathbb{R}^{m\times n},\, b \in \mathbb{R}^m,\, c \in \mathbb{R}^n, \\ M = \{x \in \mathbb{R}^n \,: Ax = b,\, x \geq 0\}, \\ \text{Finde } x^\star \in M, \text{ sodass } f(x^\star) = \min_{x\in M} f(x) := c^\top x \end{gathered} \tag{P1}$$

(i) Sei $x^\star \in M$ eine Lösung von (P1). Zeigen Sie, dass $x^\star \in \partial M$, (d.h., $x^\star$ liegt auf dem (topologischen) Rand der Menge).

(ii) Zeigen Sie, dass wenn das Problem (P1) lösbar ist, dann ist mindestens eine Ecke auch eine Lösung von (P1).

(iii) Sei die zulässige Menge M von (P1) nichtleer. Beweisen Sie mit Hilfe des erweiterten linearen Programms:

$$\tilde{M} = \{(x,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,:\, Ax + \tilde{x} = b,\, x, \tilde{x} \geq 0\},$$
$$\text{Finde } (x^\star, \tilde{x}^\star) \in \tilde{M}, \text{ sodass } \tilde{f}(x^\star,\tilde{x}^\star) = \min_{(x,\tilde{x})\in\tilde{M}} \tilde{f}(x,\tilde{x}) := \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i,$$

dass M mindestens eine Ecke besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass es endlich viele Ecken gibt.

(iv) Sei M nichtleer und beschränkt ist, zeigen Sie, dass das Problem (P1) eine Lösung besitzt.

Tipp (Teil (ii)): Falls eine Lösung $x \in M$ keine Ecke ist, dann gibt es ein $y \in \ker(A)$, sodass $y \neq 0, y_{J_x} = 0$. Könnte $x + ty$ (für geeignet gewähltes $t \in \mathbb{R}$) sowohl eine Ecke, als auch eine Lösung sein?

Tipp: Sie dürfen Teil (ii) in Teil (iii) und Teil (iv) verwenden, auch wenn Sie ihn nicht gelöst haben.