Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. Sören Bartels, Tatjana Schreiber 08. Januar 2025

# Numerik I

WiSe 2024/2025 — Blatt 6

https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ws24/num/index.html

**Abgabe:** 22.01.2025, 14:00 Uhr.

**Aufgabe 1** (2+2 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = 4, \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix}^\top.$$

(i) Bestimmen Sie die Ecken der Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ Ax = b\}$ und untersuchen Sie, ob diese entartet sind.

(ii) Führen Sie das Simplex-Verfahren zur Minimierung von $f(x) = c^T x$ unter der Nebenbedingung $Ax = b$ und $x \geq 0$ mit der Startecke $x_0 = \begin{pmatrix} 0, 0, 4 \end{pmatrix}^\top$ durch.

**Aufgabe 2** (2+2 Punkte)

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max\left\{ \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x \cdot v_1 = 0 \right\}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt, wobei die Funktion $r$ definiert ist durch

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls disjunkte, nichtleere Indexmengen $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren, sodass $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $a_{ij} = 0$ für alle Paare $(i, j) \in I \times J$. Andernfalls heißt $A$ *irreduzibel*.
$A$ heißt diagonaldominant, falls für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \ \leq\ |a_{ii}|$$

und diese Ungleichung strikt für mindestens ein $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist.

(i) Betrachten Sie eine $n \times n$-*Bandmatrix* $B$ der Bandbreite $r$, das heißt:

$$B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b_{ij} = 0 \quad \text{für } |i - j| > r.$$

Untersuchen Sie $B$ auf Irreduzibilität.

(ii) Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Irreduzibilität und Diagonaldominanz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$